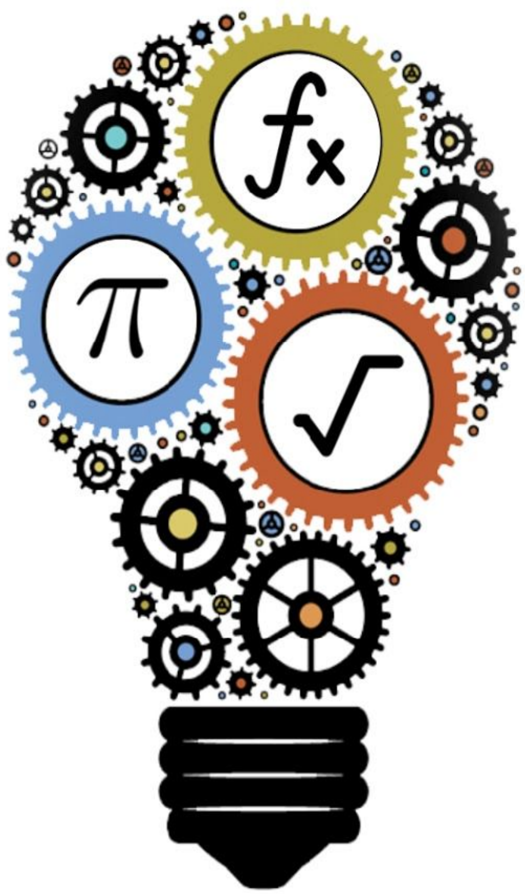
ADHARAZ
ALTASIERRA

COLEGIO ADHARAZ

MATEMÁTICAS MÁS ALLÁ DEL PAPEL



Carmen Amores, Carmen Aguilar,
Marta Irissou, Delfina Moreno, Claudia Pedraza
Guillermo Montero, Macarena De La Vega

ÍNDICE[1]

[1] Este estudio pretende demostrar cómo las matemáticas se esconden detrás de la realidad que nos rodea. Este índice, sin embargo, esconde con números la realidad de nuestro trabajo. Para solucionar estos códigos numéricos adjuntamos al final del trabajo un solucionario.

RESUMEN EJECUTIVO

«No hay rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real».

En esta sencilla frase del matemático ruso Nikolai Lobachevski (Rusia, siglo XIX), basamos toda nuestra investigación y la idea principal de nuestro proyecto: las matemáticas, aparentemente ocultas, son fáciles de encontrar si sabemos cómo buscarlas.

Ya desde tiempos remotos, al principio de la humanidad, las matemáticas formaban una parte esencial del mundo como lo conocemos. Desde siempre, el ser humano ha buscado respuestas; un porqué que pudiera explicar la vida, el orden de las cosas a su alrededor, en la naturaleza y en ellos mismos. Y, como el orden se puede cuantificar, es aquí donde surgen las matemáticas: todo, desde el crecimiento de las ramas de ciertos árboles (relatado en la sucesión de Fibonacci), hasta las mismas casas en las que vivimos, las carreteras por las que circulamos, o ese Internet que tanto significa para nosotros, está regulado por y tiene su base en las matemáticas.

OBJETIVO

Este proyecto, en el que hemos trabajado durante varios meses, tiene como nombre "Matemáticas más allá del papel". La idea principal que buscábamos con este trabajo era demostrar cómo las matemáticas se encuentran en nuestro día a día.

Estamos acostumbrados a pensar que las matemáticas se hallan sólo dentro de la clase y únicamente pueden ser plasmadas en un papel. Sin embargo, tras la investigación llevada a cabo hemos llegado a la conclusión de que las matemáticas se encuentran en cada paso que damos.

Para lograr demostrar esto, hemos imaginado a Julia, una chica que vaga por las calles de Sevilla, buscando la prueba definitiva de que las matemáticas existen en nuestro día a día. Ella analiza cosas comunes y corrientes, que podemos encontrar en cualquier parte: los semáforos, el sistema de alcantarillado, las colas de los establecimientos, o incluso dos de los edificios más emblemáticos de Sevilla.

DESARROLLO: "JULIA Y SUS NÚMEROS"

- *¿Falta alguien?- El profesor miró a su alrededor con aire preocupado: no sabía por qué, pero tenía la incómoda sensación de que algo no iba bien.*
- *¡Eh, profe!- lo llamó de pronto alguno de los alumnos, al que, oculto por sus compañeros, no pudo identificar.*
- *¿Qué pasa?*
- *Esto… Es que sí falta alguien. Es Julia…*

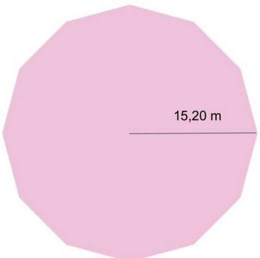
La Torre del Oro

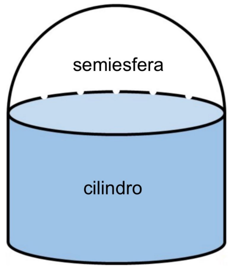
Julia apretó el paso y siguió caminando a toda velocidad, mirando a izquierda y derecha nerviosamente de vez en cuando por si alguien la seguía. Se había marchado a escondidas de aquella aburrida excursión con su clase, y lo último que quería era que la encontraran. Sabía que cuando volviera le esperaría una buena bronca, pero en aquel momento no le importaba: su objetivo esa mañana era descubrir las matemáticas en las calles de su ciudad, y pensaba conseguirlo.

Puede ser que Julia no se hubiera fijado antes, pero detrás de cada uno de los edificios y monumentos de la ciudad, se escondían las matemáticas. Su tío le había hablado de esto, mostrándole algunas de las cosas simples que podían hallarse en una calle de cualquier lugar, y le había puesto de reto encontrar ella misma otros ejemplos y analizarlos por su cuenta; reto que, por supuesto, pensaba cumplir.

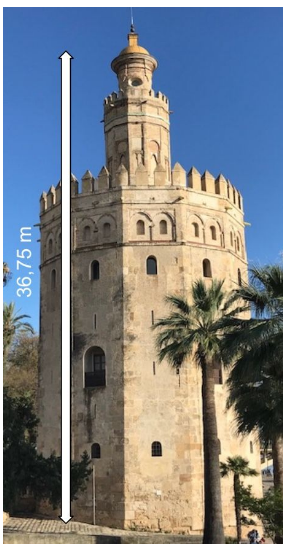
Se fijó en la Torre del oro, ese peculiar edificio mudéjar situado a orillas del Guadalquivir, que presenta una geometría bastante inusual para la época en la que se construyó. Julia se quedó asombrada al darse cuenta de que hasta los árabes habían usado las matemáticas en Sevilla.

La torre es un prisma con planta dodecagonal y está formada por tres cuerpos. Tiene una altura de 36,75 metros y el radio del primer cuerpo es de 15,20 metros. El segundo cuerpo también tiene forma dodecagonal como la base, y el tercero tiene forma cilíndrica y está rematado en una cúpula semiesférica.





Base de la torre (dodecágono) Tercer cuerpo de la torre



Semáforos

De camino a la Catedral, su destino, Julia tuvo que parar porque para cruzar la calle el semáforo estaba en rojo. Esto despertó su curiosidad: ¿habría matemáticas también allí? No lo parecía, al mirarlo, pero tampoco había parecido que las hubiera en la Torre del Oro. Por lo tanto, dado que tenía todo el tiempo del mundo, hizo caso a lo que siempre le decía su tío ("Ante la duda, investiga"), sacó el móvil, y buscó "matemáticas en los semáforos". Rápidamente aparecieron varias decenas de resultados y, tras hacer un análisis rápido, Julia se decantó por una página que parecía fiable:
https://sites.google.com/adharaz-altasierra.com/wwwlosnumerosdejuliacom/p%C3%A1gina-principal?authuser=1[2]

[2] El texto que se desarrolla a continuación está extraído de la página original que se menciona.

Los semáforos (conocidos técnicamente como señales de control) esconden matemáticas puras que nos dan a conocer cómo funciona este gran mecanismo de control de tráfico en todo el mundo.

Estos modelos se basan en ecuaciones diferenciales parciales que, en el caso del tráfico, describen la relación que hay entre el flujo y la densidad o velocidad; e incluso los peatones en las vías y el orden y la seguridad de los habitantes. Un sistema complejo como este está compuesto por diferentes subsistemas difíciles de tratar ya que dependen de numerosas variables. El tráfico es un ejemplo de este tipo de sistemas debido a que su dinámica depende de muchos factores, desde la meteorología a los días festivos, pasando por la personalidad de los propios conductores.

Este ciclo de los semáforos se debe estudiar desde tres puntos de vista distintos:

La longitud en tiempo del ciclo de los semáforos, es decir, el tiempo necesario para que se dé una sucesión completa de indicaciones en los semáforos conectados a un mismo regulador. Independientemente de lo que resulte de los cálculos, la duración del ciclo tiene que estar forzosamente comprendida entre los límites que fija la psicología del conductor.

También el porcentaje del tiempo dedicado para cada una de las fases, es decir el porcentaje de tiempo dedicado a cada una de las combinaciones de indicaciones que permiten uno o varios movimientos simultáneos a través de la intersección.

Para sincronizar de forma óptima los ciclos de los semáforos, se han empleado técnicas matemáticas que van desde la programación matemática con restricciones de equilibrio útiles para la realización de análisis estratégicos del tráfico.

En el campo de control de estos se han definido diferentes alternativas, estableciendo como variables de entrada la densidad de tráfico y la velocidad de los vehículos. Existen varios ejemplos los cuales necesitan una solución matemática para resolver con exactitud el problema empleado, como por ejemplo:

La suma de las longitudes de las colas de cada tramo de carretera, el tiempo de espera, largo de la cola más larga o una combinación de ellas.

Después de haber leído aquel texto, Julia comprendió que los semáforos son necesarios y esenciales para mantener una ciudad con seguridad y orden en la calles (aunque a veces nos saquen de quicio y hagan salir a la luz el peor lado de cada uno), es por ello por lo que debemos respetar siempre las normas de tráfico. Y para esto se utilizan las matemáticas también.

Alcantarillas

A apenas unos minutos de llegar por fin a su objeto de estudio, la Giralda, Julia cayó de bruces al suelo tras tropezar con la tapadera de una alcantarilla, que estaba en obras.

- *"Lo siento, señorita"*- dijo cortésmente uno de los dos trabajadores que movían la pesada tapadera de la alcantarilla.

Julia le aseguró que no pasaba nada, que era culpa suya por torpe; luego observó el proceso con interés, e inmediatamente una duda asaltó su mente: ¿por qué era redonda? ¿Por qué no cuadrada, pentagonal, rectangular, o incluso con forma de corazón? Nunca se había fijado en ello, y le resultó curioso: por lo tanto, volvió a su querido móvil, donde insertó en el buscador “¿por qué las alcantarillas son redondas?”. Como siempre, Google dio resultados, y Julia leyó atentamente la información que apareció en el fragmento de un libro, escrito por una chica llamada Marta.

“ ¿Alguna vez te has dado cuenta que las tapas de la mayoría de las alcantarillas son redondas? Probablemente, nunca te habrás parado a pensar en ello pero, como todo, esto tiene una explicación. Quizás ahora mismo hayas caído en la cuenta de que esto sucede en tu pueblo o ciudad. Y te preguntarás, ¿por qué no son todas cuadradas o rectangulares?

Alcantarilla redonda

Tiene relación con las matemáticas. Existe una cuestión lógica y geométrica para ello y es su forma constante. Al ser redondas, tienen la misma medida por cualquier lado. Si fuesen cuadradas, se nos podría caer la tapa por el agujero, puesto que la diagonal del cuadrado es más larga y al colocarla de manera horizontal con respecto al suelo, hay más riesgo de que se precipite dentro de la alcantarilla.

En cualquier caso, existen tapas cuadradas e incluso rectangulares, aunque estas solo se usan para tapar agujeros de unos 40cm de profundidad aproximadamente, donde no hay peligro si se cae dentro.

Alcantarilla rectangular y cuadrada

Otro de los motivos tiene relación con su peso porque son más fáciles en el transporte y no hay ninguna necesidad de cargar con ellas ya que van rodando como una rueda; y, además, son más sencillas de encajar. Pero la forma circular también facilita su proceso de fabricación debido a que, al verter el material caliente en el molde, si este es circular es más sencillo de desmoldar que uno con esquinas.

Como conclusión, podemos decir que las alcantarillas son redondas por seguridad, para evitar accidentes.

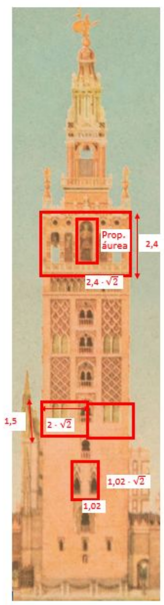
La Giralda

Finalmente, Julia llegó al verdadero destino de su paseo por Sevilla: la Giralda. La torre, mezcla de varios estilos arquitectónicos y épocas históricas (por ella habían pasado romanos, musulmanes, y cristianos), se erguía imponente delante de ella. Inspirada por la figura de aquel emblemático edificio, en su opinión uno de los más bellos de la ciudad, se sentó en el pedestal de una estatua y sacó una carpeta en la que guardaba el primer boceto de su redacción para los deberes de matemáticas. Mordiendo el lápiz, la contempló con interés, y finalmente inclinó la cabeza sobre el papel y comenzó a escribir.

"Recientemente, leí un estudio que realizaron los profesores Joaquín Valderrama y Francisco Fernández, de la Universidad de Granada https://www.xataka.com/especiales/paseo-matematico-alhambra-cuando-arte-se-basa-numeros, que analizaba las figuras geométricas presentes en la Alhambra. Este artículo me hizo sentir curiosidad por comprobar si esa misma idea podría aplicarse a otros monumentos, y me puse manos a la obra, seleccionando para mi propósito un edificio emblemático de la ciudad de Sevilla: la Giralda.

Una de las cosas que podemos observar es que la forma rectangular con la proporción 1 a $\sqrt{2}$ (que coincide con la que se emplea en los folios de papel, y no por casualidad) se repite frecuentemente en este edificio y en otros muchos, en la arquitectura islámica, por ejemplo en la Alhambra, como nos explican estos dos profesores. Esta figura logra un efecto de equilibrio y armonía maravilloso, y por eso es empleada a menudo en la construcción.

Otra proporción que se encuentra en este monumento es la proporción áurea, utilizada ya por los griegos, y presente incluso en la naturaleza (por ejemplo, en las caracolas, o en las mismas cadenas de nuestro ADN). La división de un segmento en proporción áurea consiste en hacerlo de tal manera que $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, , o, lo que es lo mismo, 1,618033987. Este número se denomina fi (Φ). Cualquier rectángulo que emplee esta proporción entre sus lados se denomina rectángulo áureo, y se utiliza abundantes veces en la construcción.



Teoría de Colas

Para recuperarse del enorme paseo que llevaba recorrido, Julia decidió entrar en un supermercado y comprar algo de comer. Se dirigió a Plaza de Armas, donde un autobús la recogería junto a sus compañeros. Una vez allí, se sentó para tomarse el bocadillo, y, como había llegado con mucha antelación, se puso a observar las personas que entraban y salían.

En el interior del supermercado había siete cajeros atendiendo y, una hora después, tenía apuntado que 182 personas se habían puesto en cualquiera de las siete colas para pagar y 210 habían sido atendidas.

Se puso a buscar algo de información en el móvil acerca de cómo hacer para pasar menos tiempo en la cola y, tras ver varios vídeos estaba claro, todo el mundo coincidía en que era preferible que hubiese una única fila desde la que ocupar la caja que se quedase libre en lugar de formar una cola delante de cada cajero.

Entonces Julia se preguntó cuánto mejor sería en aquel caso concreto. Al llegar a casa intentaría descubrirlo.

Dicho y hecho.

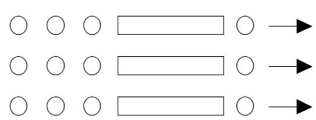
Consultó varias páginas en internet, tomó apuntes, comparó fórmulas y llegó a la siguiente conclusión. Aunque no entendía de dónde salían aquellas fórmulas, aparentemente podía aplicarlas ya que la velocidad de llegada $\lambda s = 182$ clientes/hora era menor que $\mu s = 210$ clientes/hora.

He aquí lo que Julia escribió en su cuaderno.

" <u>Formulación del Problema</u>

Entramos en un supermercado y observamos que hay siete cajeros (servidores) atendiendo a los clientes que van a pagar su compra. Delante de cada cajero se ha formado una cola independiente. Queremos comparar este sistema de varias filas con otro de fila única que utilizan otros establecimientos.

λs



μs

Tomamos los datos en el propio establecimiento, de forma que el número de clientes que llegaban al sistema era 182 en una hora y el número de clientes que eran atendidos por hora fue de 210. Así, obtenemos los parámetros principales del sistema:

$\lambda s = 182$ clientes/hora ; $\mu s = 210$ clientes/hora

Este sistema se puede sustituir por siete sistemas independientes de una fila con un solo servidor de notación Kendall (M/M/1). Como los clientes se reparten por igual en cada fila, la velocidad de llegada de cada una será $\lambda = \frac{\lambda s}{7}$, y la velocidad a la que atiende cada servidor será $\mu = \frac{\mu s}{7}$.

Las expresiones que para este modelo nos ofrece la teoría de colas son las siguientes:

$\lambda - número\ de\ clientes\ que\ llegan\ al\ sistema\ por\ unidad\ de\ tiempo.$

$\mu - número\ de\ clientes\ que\ son\ atendidos\ por\ el\ servidor\ por\ unidad\ de\ tiempo.$

$Po - probabilidad\ de\ que\ no\ haya\ ningún\ cliente\ en\ el\ sistema;\ Po = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

$Ls - número\ promedio\ de\ clientes\ que\ hay\ en\ el\ sistema;\ Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$Ws - tiempo\ promedio\ que\ el\ cliente\ pasa\ en\ el\ sistema;\ Ws = \frac{1}{\mu - \lambda}$

$Lq - número\ de\ clientes\ promedio\ que\ esperan\ en\ la\ cola;\ Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

$Wq - tiempo\ promedio\ que\ el\ cliente\ pasa\ en\ la\ cola;\ Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

Calculamos para nuestro sistema:

$\lambda = \frac{\lambda s}{7} = \frac{182}{7} = 26$ clientes/hora

$\mu = \frac{\mu s}{7} = \frac{210}{7} = 30$ clientes/hora

$Po = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0.1333333$

$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 6.5$ clientes por subsistema ; $Ls\ total = 7(6.5) = 45.5$ clientes

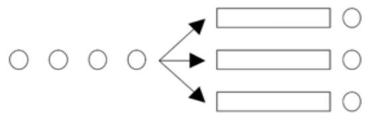
$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = 0.25$ horas en el sistema

$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 5.63333$ clientes por fila; $Lq\ total = 7(5.63333) = 39.433333$ clientes

$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 0.216667$ horas

Ahora vamos a calcular los mismos parámetros para un modelo de fila única con s=7 servidores, de modo que cuando uno de los servidores queda desocupado el cliente al que le toca ocupa esa posición y pasa a ser atendido (M/M/7).

λs



Las expresiones que nos proporciona la teoría de colas para un sistema de este tipo son las siguientes (ya que $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$)

$\lambda - número\ de\ clientes\ que\ llegan\ al\ sistema\ por\ unidad\ de\ tiempo.$

$\mu - número\ de\ clientes\ que\ son\ atendidos\ por\ el\ servidor\ por\ unidad\ de\ tiempo.$

$Po - probabilidad\ de\ que\ no\ haya\ ningún\ cliente\ en\ el\ sistema;\quad Po =$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$$

$Ls - número\ promedio\ de\ clientes\ que\ hay\ en\ el\ sistema;\ Ls = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$

$Ws - tiempo\ promedio\ que\ el\ cliente\ pasa\ en\ el\ sistema;\ Ws = \frac{Ls}{\lambda}$

$Lq - número\ de\ clientes\ promedio\ que\ esperan\ en\ la\ cola;\ Lq = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda\mu}{(s-1)!\,(s\mu - \lambda)^2}\ Po$

$Wq - tiempo\ promedio\ que\ el\ cliente\ pasa\ en\ la\ cola;\ Wq = \frac{Lq}{\lambda}$

Calculamos para nuestro sistema:

$\lambda = 182$ clientes/hora

$\mu = 30$ clientes/hora

$s = 7$ servidores

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)} = 0.001414$$

$$Lq = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} Po = 4.136608$$ clientes en la cola

$$Ls = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = 10.203275$$ clientes en el sistema

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda} = 0.056062$$ horas en el sistema

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = 0.22729$$ horas en la cola

De los resultados se concluye que el sistema de fila única es mejor ya que tiene menor cantidad de clientes tanto en el sistema como en la cola y también son menores el tiempo promedio de estancia en el sistema y de espera.

	Filas Independientes	Fila Única
Ls	45.5 clientes	10.203075 clientes
Lq	5.633333 clientes	4.136608 clientes
Ws	0.25 horas	0.056062 horas
Wq	0.216666 horas	0.022729 horas

”

A la vista de estos resultados Julia quedó sorprendida de que no todos los establecimientos tuvieran un sistema de fila única cuando este sistema no incrementa los costes del empresario (el número de servidores/cajeros es el mismo) y, claramente, hará que el cliente se sienta más satisfecho, por un lado porque tendrá que esperar menos tiempo y, por otro, porque evitará tener que decidir en qué cola colocarse y sentirse, seguramente, frustrado al comprobar que otros clientes de la cola de al lado, que llegaron después que él, ya han sido atendidos mientras él sigue esperando. Aunque esto ya no son matemáticas, sino psicología… ¿y qué empresario no quiere tener muchos clientes contentos?

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Tras analizar distintas situaciones en las que las matemáticas forman una parte importante, hemos comprobado que, irrefutablemente, están presentes y son fundamentales en nuestra vida.

Julia dio un breve paseo de aproximadamente 5.830 pasos, el equivalente a 3.500 metros. En ese tiempo pudo observar nada menos que cinco situaciones y objetos que tienen su base en las matemáticas. Si decidiera analizar todas las cosas que se fuera encontrando y dispusiera de más tiempo, podría enumerar millones de otros ejemplos en los que los cálculos, la geometría, el álgebra, etcétera (las matemáticas, resumiendo) están presentes; ya que, sin ellos, viviríamos en un mundo más caótico de lo que ya es.

Se puede concluir que, si la naturaleza se ordena en fórmulas matemáticas, el hombre contribuye ordenando su día a día según este mismo lenguaje numérico. Sevilla, en sus edificios emblemáticos y en su estructura organizativa, habla perfectamente en “matemático”.

COLABORACIÓN

Cuando **ec2c** y nuestro colegio nos ofrecieron la oportunidad de ampliar nuestros conocimientos matemáticos y participar en el **GrowLab**, nos propusimos dar lo mejor de nosotras mismas y hacer un trabajo de la mayor calidad posible. En nuestra primera reunión decidimos desarrollar un proyecto de matemáticas aplicadas y, para llevarlo a cabo concluimos que el tema más interesante sería contradecir el tópico de que "las matemáticas son aburridas" y que "no sirven para nada". Para ello, analizamos los fuertes de cada integrante de nuestro grupo y cada una investigó sobre usos diarios para las matemáticas; pero decidimos presentarlo, en lugar de como una serie de datos y situaciones, como partes interdependientes de una sola unidad. Más adelante, seguimos reuniéndonos tanto dentro del horario escolar como en nuestro tiempo libre para contrastar ideas y poner en común nuestras opiniones, propuestas y hallazgos. Por último, preguntamos a una serie de familiares y conocidos (expertos en distintas áreas de las matemáticas, para que nos ayudasen en el desarrollo de nuestra idea) su opinión acerca de nuestro primer boceto; y, a partir de sus comentarios, el trabajo evolucionó hasta lo que ahora es. Para concluir, imaginamos a Julia como nuestro hilo conductor, para que conectase las distintas partes del proyecto, e hicimos de su vida parte de la nuestra.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a nuestros mentores Macarena de la Vega y Guillermo Montero por su tiempo y ayuda. Además, sentimos un profundo agradecimiento a **ec2c** por brindarnos tan fantástica oportunidad de seguir aprendiendo, con este proyecto hemos descubierto el cómo y el porqué de miles de cosas que no conocíamos. Gracias también a nuestros padres, por apoyarnos y estar ahí siempre que nos atascábamos. Este proyecto no hubiese sido posible sin nuestra profesora Isabel Salcedo, por su paciencia, dedicación y ayuda inestimable en la redacción de nuestro trabajo.

SOLUCIONARIO DEL ÍNDICE:

V. 0	Introducción
A. ∃	Resumen ejecutivo
B. /	Objetivo
VI. (1^5)	Desarrollo: Julia y sus números
II. (?=X)	Colaboración
II. (=)	Resultados y conclusiones

BIBLIOGRAFÍA:

- www.lcc.es/~ezeqlr/ios/Tema5.pdf
- http://personales.upv.es/jpgarcia/linkeddocuments/teoriadecolasdoc.pdf
- http://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/77595/Esteban%20Velazquez%20Gabriel%TFG.pdf?sequence=1
- https://www.xataka.com/especiales/paseo-matematico-alhambra-cuando-arte-sebasa-numeros
- www.losnúmerosdejulia.com