EL SECRETO DEL TIEMPO

Autores: Javier Blasco, Gonzalo Fernández, Ignacio González, Miguel Fernández, Ramón Torres, Rafael Vázquez, Adolfo Vázquez, Eduardo Calvo, Alejandro Gómez, Pablo Bonilla, Raúl Martínez, Pablo Martín, Pablo Fijo, Pablo Montalvo, Manuel Enrile

Tutor: Juan José Jiménez. **Centro:** Colegio Portaceli

Segunda edición del concurso Growlab en el área de Matemáticas

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 3

¿QUÉ ES UN GRAFO? 4
- Partes de los grafos 4
- Tipos de grafos 5
- Actividades y Eventos 6
- Tipos de eventos 7
- Holgura de un evento 9
- Tiempo Máximo 10
- Tiempo de Holgura 10

GRAFO DEL PROYECTO 13
- Actividades 13
- Tiempo Máximo 13
- Tiempo de Holgura 14
- Aplicaciones 14

PROGRAMACIÓN DEL GRAFO 14
- Camino crítico y tiempo máximo 14
- Tiempo mínimo y camino más óptimo 16
- Tiempo máximo de cada nodo 16

PROGRAMACIÓN LINEAL 17
- Condiciones 18
- Restricciones 18
- Función Objetivo 18
- Resolución del problema 19
- Problema 19

BIBLIOGRAFÍA 21

INTRODUCCIÓN

Somos un grupo de quince alumnos del colegio Portaceli pertenecientes a la rama tecnológica. A principio de curso, nuestro tutor nos propuso participar en este proyecto ofrecido por la empresa ec2ce en conjunto con Cesur y, curiosamente, quisimos unirnos tantos que tuvimos que pasar por un proceso de selección. Es por ello, que los que quedamos tenemos gran ilusión y compromiso con el concurso y esperamos reflejarlo en la presentación de nuestro trabajo.

Se nos presentaba entonces la dificultad de elegir el tema. Para ello, nos ponemos en contacto con nuestros compañeros de 2º de bachillerato, que ya participaron en este concurso el curso pasado, para que nos dieran ideas. Apareció entonces la palabra grafos, la cual nos llamó mucho la atención porque ya habíamos oído utilidades muy interesantes sobre esta herramienta matemática.

Otro grupo de nuestros compañeros de segundo, también nos hablaron sobre la programación lineal que ya sabíamos resolver pues lo vimos el curso pasado. Ppero no teníamos ni idea de que esto pudiera tener utilidades tan prácticas como invertir en bolsa, entonces nos planteamos buscar otra utilidad de algo tan sencillo como resolver inecuaciones.

Llegados a este punto, se nos ocurrió la idea de incorporar en un solo trabajo los tres proyectos presentados por nuestro colegio el curso pasado en Growlab, es decir, buscar un tema en común en el que pudiéramos incorporar todas esas nociones que nos estaban explicando nuestros compañeros de un curso superior.

A pesar de que es difícil la organización y comunicación en un grupo tan grande, bien es cierto que quince mentes piensan más que una y además, gracias a la buena gestión de los tiempos de trabajo, hemos establecido junto al tutor una rutina en la que cada uno aporta semanalmente la tarea que se le asigna. De esta manera siempre que nos reunimos únicamente tenemos que pulir lo que llevamos hecho y establecer las tareas para la próxima semana, optimizando así los tiempos de trabajo.

Un momento, "optimizar los tiempos de trabajo", esto suena bien. ¿Por qué no usar los grafos, la programación lineal y algo de programación informática vista por el grupo de criptografía para poder sacar el trabajo adelante lo más rápido posible sin dejar atrás la corrección, coherencia y cohesión del mismo. Se podría decir que usamos el tema de nuestro trabajo para optimizar la realización del mismo.

Por tanto, usaremos los grafos como el pilar de nuestro proyecto. De hecho, esta es la principal herramienta matemática que usaremos para lograr nuestro objetivo, que se trata de optimizar los proyectos para que se hagan en el tiempo mínimo posible. Para ello tendremos en cuenta el posible uso de los tiempos muertos que se generan durante la realización de algunas actividades. De esta manera el aprovechamiento del tiempo es infinitamente mayor, permitiendo la realización de cualquier proyecto en un tiempo ínfimo.

Un claro ejemplo de las aplicaciones de nuestro trabajo sería el proyecto de reconstrucción llevado a cabo tras el terremoto del pasado 11 de marzo de 2011.

El terremoto y tsunami de Japón de 2011, denominado oficialmente por la Agencia Meteorológica de Japón como el terremoto de la costa del Pacífico en la región de Tōhoku de 2011 o Gran terremoto de Japón oriental del 11 de marzo, fue un terremoto de magnitud 9,0 Mw que creó olas de maremoto de hasta 40,5 metros.

En él se consiguió una optimización tal que, en 6 días, el gobierno japonés reconstruyó una autovía clave para la reactivación del comercio y el abastecimiento de las zonas afectadas por la catástrofe, tal y como se puede consultar en el apartado 4 de la bibliografía. Seguro que muchos se preguntan cómo es posible dicha reconstrucción en tan poco tiempo sin tener ilimitados recursos ni ilimitado personal, pues esperamos que tras la lectura de este proyecto quede resuelta esa duda. Para ello, nos debemos hacer la siguiente pregunta:

¿QUÉ ES UN GRAFO?

Empezaremos por tener claro qué es un grafo y cuáles son sus posibles aplicaciones. Ya habíamos oído algo en clase, si a esto le sumamos el conocimiento transmitido por nuestros compañeros de segundo, podemos hacer las siguientes conclusiones.

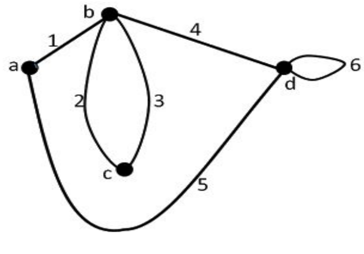
Si hablamos de él en computación y matemáticas, un grafo es una representación gráfica de diversos puntos que se conocen como **nodos** o **vértices**, los cuales se encuentran **unidos** a través de **líneas** que reciben el nombre de **aristas**. Al analizar los grafos, se consiguen conocer las relaciones entre los distintos puntos que tienen alguna interacción y cómo se desarrollan estas relaciones, en otras palabras, un grafo consiste en un esquema en el que se visualizan las distintas partes de un proceso. De esta manera se puede reducir cualquier proceso a una serie de actividades (aristas) y eventos (nodos) puntuales que se suceden e interconectan entre sí determinando la manera y el momento en el que se realizan. Esto nos permite establecer cualquier proyecto o proceso de manera visual pudiendo organizar las partes de las que se compone de la manera más óptima, rentable, económica y eficiente posible.

Partes de los grafos

A partir de esta figura se definen los siguientes elementos:

Vértices (nodos): Son los puntos de unión entre las aristas representados por un punto, que representan eventos puntuales (en nuestro proyecto indican el comienzo y el fin de las actividades que relaciona). En el ejemplo los vértices son V= {a, b, c, d}.

Lados (aristas): Son las líneas que unen un vértice con otro, representando las distintas actividades y se les puede nombrar con una letra, un número o una combinación de ambos. También se le puede asignar las letras de los vértices que une, yendo entre paréntesis (ej L1={a,b}). En el grafo ilustrado los lados son: L= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.



Lados paralelos: Corresponde a las aristas que salen del mismo vértice y acaban ambas en otro, compartiendo el vértice de comienzo y de fin. En el grafo de la imagen los lados paralelos son: P= {2,3}.

Lazo: Recibe este nombre por la forma que tiene la arista que comienza y termina en el mismo vértice. En el grafo ya mencionado se observa el lazo: A= {6}

Valencia de un vértice: Se calcula tomando en consideración tanto el número de lados que conectan de entrada como los lados que conectan de salida con un vértice. En el grafo anterior las valencias de los vértices son:

Valencia (**a**)=2 Valencia (**b**)=4
Valencia (**c**)=2 Valencia (**d**)=3

Tipos de grafos

Los grafos pueden ser clasificados de diversas maneras según sus características. Los grafos **simples**, en este sentido, son aquellos que surgen cuando una única arista logra unir dos vértices. Los grafos **complejos,** multigrafos o pseudografos, en cambio, presentan más de una arista en unión con los vértices. Estas aristas se llaman múltiples o lazos (loops en inglés). Los grafos simples son una subclase de esta categoría de grafos.

Por otra parte, un grafo es **conexo** si dispone de dos vértices conectados a través de un camino. ¿Qué quiere decir esto? Que, para el par de vértices (p, r), tiene que existir algún camino que permita llegar desde p hasta r. En caso contrario se dirá que el grafo es **disconexo**. En cambio, un grafo es **fuertemente conexo** si el par de vértices tiene conexión a través de, como mínimo, dos caminos diferentes. Un grafo **simple**, además, puede ser **completo** si las aristas están en condiciones de unir todos los pares de vértices, mientras que un grafo es **bipartito** si sus vértices surgen por la unión de un par de conjuntos de vértices y si se cumple una serie de condiciones.

Si seguimos indagando en el mundo de los grafos también encontramos los siguientes:

Grafo **orientado**, grafo dirigido o digrafo. Son grafos en los cuales se ha añadido una orientación a las aristas, es decir, desde a hasta b, o viceversa, se representa gráficamente por una flecha.

Grafo **etiquetado**: En los cuales se ha añadido un peso a las aristas o un etiquetado a los vértices.

Grafo **aleatorio**: Cuyas aristas están asociadas a una probabilidad.

Hipergrafo: En los cuales las aristas tienen más de dos extremos, es decir, las aristas son incidentes a 3 o más vértices.

Grafo **infinito**: Grafos con conjunto de vértices y aristas de cardinal infinito.

Grafo **regular**: Un grafo es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado de valencia.

Grafo **plano**: Los grafos planos son aquellos cuyos vértices y aristas pueden ser representados sin ninguna intersección entre ellos. Podemos estudiar si un grafo es plano gracias al Teorema de Kuratowski.

En este proyecto usaremos los grafos simples, conexos, completos, orientados, etiquetados y planos.

Actividades y Eventos

En este proyecto, como ya hemos comentado al comienzo del mismo, usaremos la teoría de grafos como eje del trabajo de investigación que hemos realizado. Debemos recordar que queremos optimizar el tiempo de realización de un trabajo o proyecto, tal y como consiguieron realizar los japoneses tras el terremoto y su posterior tsunami.

Para ello, representaremos cada una de las actividades a realizar en el proyecto como aristas del grafo, y cada evento como nodos, los cuales marcan el comienzo de la siguiente etapa y por tanto, nos condicionarán las siguientes actividades.

Tenemos que diferenciar entre dos tipos de actividades:

- Consecuencia: son actividades que dependen de otras para poder realizarlas.
- Simultáneas o independientes: son actividades que no están relacionadas y, por lo tanto, no necesitan depender la una de la otra.

A pesar de que ya hemos visto los distintos tipos de grafos existentes en el mundo de las matemáticas y la computación. Para nuestro trabajo, necesitamos enumerar y distinguir entre diferentes tipos de actividades y de eventos.

Tipos de actividades:

-Real: son actividades convencionales que requieren trabajo, tiempo y recursos para poder ser realizadas. Al ser una arista, necesitará que el evento anterior esté acabado para poder llevarla a cabo. Es decir, la arista (actividad) parte de un nodo (evento) con el peso de un tiempo, o lo que es lo mismo, el proceso de paso de un nodo a otro. (Ej: Contratar trabajadores en el sector de la construcción trás haber elaborado un plano del puente)

-Espera: son aquellas actividades que no necesitan gasto de recursos o supervisión. (Ej: esperar a que se seque el cemento en la construcción)

-Ficticia: arista que no se corresponde con ninguna tarea real y que requiere tiempo nulo. Se utiliza para aclarar una relación que no ha quedado definida por ninguna actividad real. Suelen ser aristas que unen una actividad ya terminada con otra que queda por terminar, indicando que una tercera actividad solo puede comenzar cuando ambas actividades previas terminen. Se representa con una línea discontinua. (Ej: Tras contratar a los empleados, la actividad simultánea de ir preparando los materiales debe terminar para comenzar la construcción del puente. Esta relación de “espera” entre contratar y preparar materiales se define con una arista ficticia).

Tipos de eventos

Entre los eventos debemos distinguir entre el **inicial**, es decir con qué debemos comenzar nuestro proyecto. El **final**, evento con el que damos por finalizado el proyecto, y por último, los eventos **intermedios**, los cuales son necesarios para ir desarrollando el proyecto en su totalidad.

A cada evento le asignaremos un número simplemente para asignar un orden dentro del proyecto. Aunque esto será explicado detalladamente más adelante.

Haciendo uso de los grafos etiquetados, a cada actividad se le asignará el tiempo requerido para pasar del evento anterior al posterior, es decir, el tiempo necesario para llevar a cabo dicha actividad.

Llegados a este punto, ya estamos en disposición de poder realizar el grafo, sin miedo a encontrarnos alguna característica de la que no sepamos a que se refiere. En primer lugar se escribe la **lista de todas las actividades**, **se ordenan** y se hacen los **fragmentos del grafo.** Para la uniformidad, aclaración y mayor entendimiento del grafo que necesitamos, llevamos a cabo las siguientes reglas de construcción del grafo.

1º Las aristas dirigidas siempre serán en sentido hacia el evento final para así evitar aristas que vuelvan hacia atrás que tienen poco sentido en nuestro proyecto.

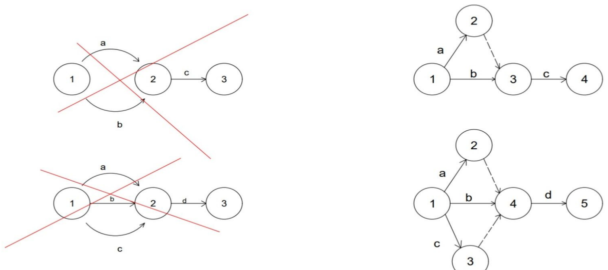
2º Utilizaremos un grafo plano, es decir, sin aristas que se corten.

3º Todos los eventos, excepto el inicial, tienen actividades precedentes.

4º Todos los eventos, excepto el final, tienen actividades que lo siguen.

5º No tienen ciclos (periodo temporal que, una vez finalizado, vuelve a empezar).

6º Si un evento constituye el inicio de dos o más actividades que preceden el inicio de la siguiente actividad, entonces se realiza una flecha discontinua y un evento adicional



Simplifica la computación

7º Algunas actividades pueden comenzar antes de que la actividad que les precede sea terminada, para ello se realizan subdivisiones.

Tal y como hemos comentado en varias ocasiones, pretendemos optimizar el tiempo final del proyecto, además de encontrar y saber aprovechar los tiempos muertos que se puedan generar. Para ello, necesitamos conocer algunas nociones intrínsecas en los grafos que nos ayudan a calcular esta optimización.

Camino: es una sucesión de vértices tal que para cada uno de sus vértices existe una arista hacia el vértice sucesor. Un camino simple es aquel que no repite vértices en su recorrido. Dos caminos son ajenos o independientes si no tienen ningún vértice en común excepto el primero y el último.

Longitud de un camino: Tiempo necesario para realizar todas las actividades del camino.

Camino crítico: Dentro de todas las longitudes existentes, es la más extensa. Nos indica el tiempo mínimo en el que realizar el proyecto en su plenitud, sin dar cabida a retrasos.

Camino completo: Camino que comienza en el evento inicial y termina en el evento final.

Actividades críticas: Actividades que se encuentran en el camino crítico. Aquí hallaremos la clave de nuestro proyecto, puesto que de la duración de estas, depende el plazo total de realizar todas las actividades, por ende si se modifica el tiempo de estas actividades, se modifica el plazo total.

Actividades no críticas: No se encuentran en el camino crítico. Estas actividades admiten cierto retraso sin afectar al plazo total del proyecto, es decir, lo que anteriormente hemos nombrado coloquialmente como "jugar con los tiempos muertos".

Así pues, ya hemos visto que la clave está en el estudio del camino crítico. Cabe destacar que existen diferentes algoritmos tanto para la búsqueda como para el cálculo de la longitud del camino crítico. Nosotros nos basaremos en el Teorema de Optimalidad de la teoría de programación dinámica (para más información, apartado 10 de los enlaces de internet dentro de la bibliografía)

Este teorema nos da un guión de cómo ir construyendo el grafo para que en él quede reflejado todos los datos necesarios para su optimización temporal.

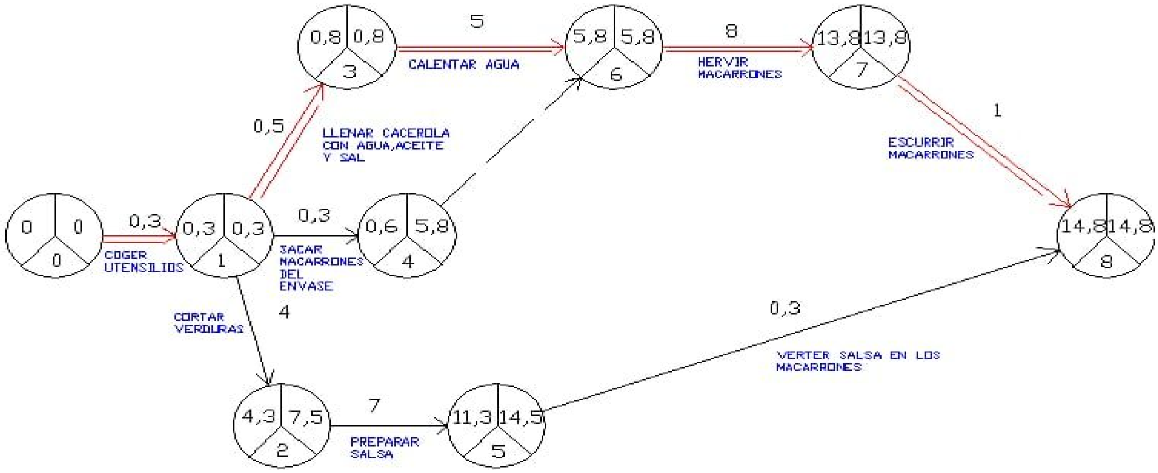
1º En cada nodo representamos un círculo (evento) dividido en tres sectores, en el inferior se escribe el número de orden del evento.
2º Se busca el camino crítico, recordemos, el de mayor longitud. Este camino lo representaremos en el grafo con aristas dobles, para poder distinguirlo rápidamente de los demás caminos en un futuro.
3º En el sector izquierdo de cada evento se escribe el tiempo de presentación máximo de todos los posibles, es decir, el tiempo mínimo que ha tenido que pasar desde que comenzamos el proyecto para poder llegar a este evento. Para esto, se restablece la longitud del camino hacia atrás. Su nomenclatura será "tm" (tiempo máximo), que usaremos a lo largo del documento.
4º En el sector derecho de cada evento se indica el tiempo de holgura, es decir, el intervalo de tiempo hasta el que se puede retrasar la actividad sin afectar al tiempo del camino crítico. Eso se explica más adelante en el apartado "Holgura de eventos". Lo llamaremos "tlej" (tiempo de presentación más lejano) cada vez que lo nombremos en el documento.

Para mayor entendimiento de todo lo visto hasta ahora, debemos ver un ejemplo para trabajar todo esto. El ejemplo debe ser corto y práctico para mayor entendimiento tanto de nosotros como del futuro lector. Entonces, ¿por qué no hacerlo de algo tan común y casero como puede ser la preparación de un plato de macarrones?

Por tanto, vamos a crear un grafo como el descrito en todos los pasos anteriores. Primero debemos enumerar todas las actividades necesarias para llevar a cabo el plato de macarrones: **1.** Coger utensilios, **2.** Cortar verduras, **3.** Llenar cacerola con agua, aceite y sal, **4.** Sacar macarrones del envase, **5.** Preparar salsa, **6.** Calentar agua, **7.** Hervir macarrones, **8.** Escurrir macarrones y verter salsa en los macarrones.

Realizamos ahora los cálculos de los tiempos máximos y los tiempos lejanos tal y como hemos descrito anteriormente.

A continuación, representamos el grafo con todos los resultados para que facilitar la comprensión de los cálculos por parte del lector.



-Del vértice 8 regresamos al vértice de la arista que determina que tm (8)=14.8, es la arista (7,8).

-Del vértice 7 regresamos al vértice de la arista que determina que tm (7)=13.8, es la arista (6,7).

-Del vértice 6 regresamos al vértice de la arista que determina que tm (6)=5.8, es la arista (3,6).

-Del vértice 3 regresamos al vértice de la arista que determina que tm (3)=-0.8, es la arista (1,3).

-Del vértice 1 regresamos al vértice de la arista que determina que tm (1)=0.3, es la arista (0,1).

El camino crítico es **0-1-3-6-7-8**, indicándonos un tiempo mínimo en el que finalizar por completo el proyecto sin demorarnos.

Las actividades no críticas tienen cierta reserva de tiempo tal y como hemos comentado en los apartados anteriores.

Se hallan los tiempos de terminación más tempranos de las actividades , se comparan y se elige el mayor de ellos.

Holgura de un evento

Es la duración del intervalo de tiempo durante el cual el retraso de cumplimiento de actividades críticas no influye en la finalización del proyecto.

Se conoce al "tiempo de presentación más lejano" como la mayor tardanza de presentación de un evento sin cambiar el plazo de culminación del proyecto. Los cálculos se realizan desde el evento final al inicial.

En el dibujo anteriormente visto, vamos a obtener el tiempo lejano (2), el tiempo lejano (4) y el tiempo lejano (5), ya que son los únicos nodos que se encuentran fuera del camino crítico, debido a que estos(los nodos del camino crítico) tienen el mismo tiempo lejano que tiempo máximo, ya que estas actividades no se pueden retrasar.
Tenemos la actividad t (1,2)=4'3.

La actividad (1,2) puede comenzar no menos de 4'3 minutos antes del evento.
Sabemos que tiempo lejano (2)=7'5, porque tiempo lejano (2)= (14'8-0'3-7)=7'5. Entonces, la actividad (1,2), puede ocurrir en el intervalo (4'3,7'5).

La actividad t(1,4)=0'6. La actividad (1,4) puede comenzar no menos de 0'6 minutos antes del evento. Sabemos que tiempo lejano (4)=5'8, porque tiempo lejano (4)= (14'8-1-8)=5'8. Entonces, la actividad (1,4), puede ocurrir en el intervalo (0'6,5'8).

La actividad t(2,5)=11'3. La actividad (2,5) puede comenzar no menos de 11'3 minutos antes del evento. Sabemos que tiempo lejano (5)=14'5, porque tiempo lejano (5)= (14'8-0'3)=14'5. Entonces, la actividad (2,5), puede ocurrir en el intervalo (11'3,14'5).

Si cada uno de estos eventos se presenta en su intervalo, el plazo de culminación no se verá afectado.

A continuación dejamos plasmados todos los resultados de los tiempos máximos y los tiempos lejanos del grafo anterior del ejemplo del plato de macarrones.

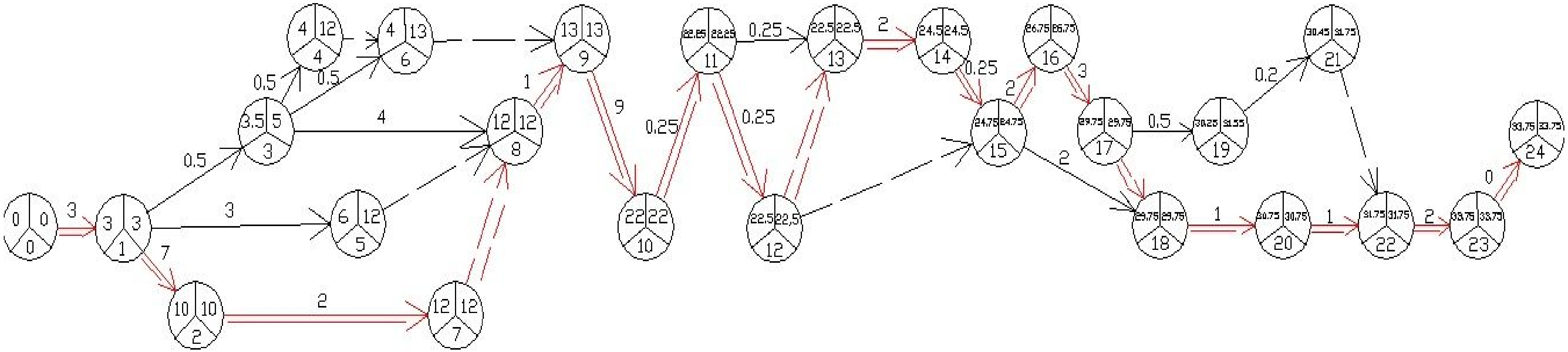
Tiempo Máximo

tm(**0**) = 0 min
tm(**1**) = 0'3 min
tm(**2**) = 0'3 + 4 = 4'3 min
tm(**3**) = 0'3 + 0'5 = 0'8 min
tm(**4**) = 0'3 + 0'3 = 0'6 min
tm(**5**) = 4'3 + 7 = 11'3 min
tm(**6**) = max {0'8 + 5, 0'6} = 5'8 min
tm(**7**) = 5'8 + 8 = 13'8 min
tm(**8**) = max {11'3 + 0'3, 13'8 + 1} = 14'8 min
Camino crítico pasa por los nodos: 0-1-3-6-7-8

Tiempo de Holgura

tlej(**8**) = 14'8 min
tlej(**7**) = 14'8 - 1 = 13,8 min
tlej(**6**) = 13'8 - 8 = 5,8 min
tlej(**5**) = 14'8 - 0'3 = 14,5 min
tlej(**4**) = 5'8 - 0 = 5'8 min
tlej(**3**) = 5'8 - 5 = 0'8 min
tlej(**2**) = 14'5 - 7 = 7'3 min
tlej(**1**) = (5'8 - 0'3, 0'8 - 0'5, 7'5 - 4) = 0'3 min
tlej(**0**) = 0'3 - 0'3 = 0 min
Camino de holgura 8-7-6-3-1-0

GRAFO DEL PROYECTO



GRAFO DEL PROYECTO

El grafo realizado por los miembros del proyecto representa las diferentes actividades con sus respectivos tiempos que nos ha costado llevar a cabo el proyecto y dar así con una conclusión final y prioritaria en él. Tenemos en cuenta desde la elección de miembros quienes harán posible este proyecto (y, por ende, el comienzo del nuevo año escolar) hasta la presentación al jurado y al público expectante del proyecto con la indudable victoria que refleja nuestro esfuerzo y dedicación. A continuación, analizaremos los diferentes elementos del grafo los cuales nos harán entender la propia elaboración del proyecto en unos tiempos concretos y no tan concretos.

Actividades

1. Elección de alumnos.
2. Formación de alumnos.
3. Elección del tema.
4. Charla matemática.
5. Buscar información.
6. Investigación sobre grafos.
7. Redactar la información.
8. Realizar la portada.
9. Escribir la introducción.
10. Hacer grafo corto.
11. Diseñar las actividades con su tiempo (grafo corto).
12. Calcular tiempos.
13. Dibujar el grafo.
14. Programar el grafo corto.
15. Revisar el grafo.
16. Hacer grafo del proyecto.
17. Programar el grafo.
18. Escribir resultados, cálculos y grafos en el trabajo.
19. Entregar proyecto.
20. Realizar la presentación.
21. Redactar discurso.
22. Ensayar la presentación.
23. Presentar la presentación.
24. Ganar el concurso.

Tiempo Máximo

tm(0) = 0 h
tm(1) = 3 h
tm(2) = 3 + 7 = 10 h
tm(3) = 3 + 0’5 = 3’5 h
tm(4) = 3’5 + 0’5 = 4 h
tm(5) = 3 + 3 = 6 h
tm(6) = max {3’5 + 0’5, 4} = 4 h
tm(7) = 10 + 2 = 12 h
tm(8) = max {3’5 + 4, 6, 12} = 12 h
tm(9) = max {4, 12 + 1} = 13 h
tm(10) = 13 + 9 = 22 h
tm(11) = 22 + 0’25 = 22’25 h
tm(12) = 22’25 + 0’25 = 22’5 h
tm(13) = max { 22’25 + 0’25, 22’25} = 22’5 h
tm(14) = 22’5 + 2 = 24’5 h
tm(15) = max {22’5, 24’5 + 0’25} = 24’75 h
tm(16) = 24’75 + 2 = 26’75 h
tm(17) = 26’75 + 3 = 29’75 h
tm(18) = max {24’75 + 2, 29’75} = 29’75 h
tm(19) = 29’75 + 0’5 = 30’25 h
tm(20) = 29’75 + 1 = 30’75 h
tm(21) = 30’25 + 0’2 = 30’45 h
tm(22) = max {30’75 + 1, 30’45} = 31’75 h
tm(23) = 31’75 + 2 = 33’75 h
tm(24) = 33’75 h

Camino crítico pasa por los nodos:
0-1-2-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-20-22-23-24

Tiempo de Holgura

tlej(24) = 33’75 h
tlej(23) = 33’75 - 0 = 33’75 h
tlej(22) = 33’75 - 2 = 31’75 h
tlej(21) = 31’75 - 0 = 31’75 h
tlej(20) = 31’75 - 1 = 30’75 h
tlej(19) = 31’75 - 0’2 = 31’55 h
tlej(18) = 30’75 - 1 = 29’75 h
tlej(17) = min {29’75 - 0, 31’55 - 0’5} = 29’75 h
tlej(16) = 29’75 - 3 = 26’75 h
tlej(15) = min {29’75 - 2, 26’75 - 2} = 24’75 h
tlej(14) = 24’75 - 0’25 = 24’5 h
tlej(13) = 24’5 - 2 = 22’5 h
tlej(12) = min {22’5 - 0, 24’75 - 0} = 22’5 h
tlej(11) = min {22’5 - 0’25, 22’5- 0’25} = 22’25 h
tlej(10) = 22’25 - 0’25 = 22 h
tlej(9) = 22 - 9 = 13 h
tlej(8) = 13 - 1 = 12 h
tlej(7) = 12 - 0 = 12 h
tlej(6) = 13 - 0 = 13 h
tlej(5) = 12 - 0 = 12 h
tlej(4) = 12 - 0 = 12 h
tlej(3) = min {9 - 4, 12 - 0’5, 12 - 0’5} = 5 h
tlej(2) = 12 - 2 = 10 h
tlej(1) = min {10 - 7, 8 - 3, 5 - 0’5} = 3 h
tlej(0) = 3 - 3 = 0 h

Camino de holgura:
0-1-2-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-20-22-23-24

Aplicaciones

Gracias a la teoría de grafos se pueden resolver diversos problemas como por ejemplo la síntesis de circuitos secuenciales, contadores o sistemas de apertura. Se utiliza para diferentes áreas por ejemplo, dibujo computacional, en toda las áreas de Ingeniería.

PROGRAMACIÓN DEL GRAFO

Con el uso de Excel, matrices (tablas) y la herramienta Solver, podemos calcular el tiempo máximo y tiempo mínimo del grafo completo y el recorrido de ambos caminos (camino crítico y camino más óptimo).

Camino crítico y tiempo máximo

Para calcularlo, elaboramos dos matrices o tablas en las que introduciremos las siguientes variables:

- 1ª Matriz: nodo del que parte la actividad, nodo hacia el que se dirige la actividad, duración de la actividad (distancia) y valor “en ruta”(valor binario a calcular).

- 2ª Matriz: Nodo, flujo, condición de igualdad(=) y condición.

Ambas matrices han de quedar tal que así:

Desde	Hacia	Distancia	En ruta
0	1	3	1
1	2	7	1
1	3	0,5	0
1	5	3	0
2	7	2	1
3	8	4	0
3	4	0,5	0
3	6	0,5	0
4	6	0	0
5	8	0	0
6	9	0	0
7	8	0	1
8	9	1	1
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	0
11	13	0,25	1
12	13	0	0
12	15	0	0
13	14	2	1
14	15	0,25	1
15	16	2	1
15	18	2	0
16	17	3	1
17	18	0	1
17	19	0,5	0
18	20	1	1
19	21	0,2	0
20	22	1	1
21	22	0	0
22	23	2	1
23	24	0	1

TIEMPO MÁXIMO	33,75

Nodos	Flujo		Condición
0	1	=	1
1	0	=	0
2	0	=	0
3	0	=	0
4	0	=	0
5	0	=	0
6	0	=	0
7	0	=	0
8	0	=	0
9	0	=	0
10	0	=	0
11	0	=	0
12	0	=	0
13	0	=	0
14	0	=	0
15	0	=	0
16	0	=	0
17	0	=	0
18	0	=	0
19	0	=	0
20	0	=	0
21	0	=	0
22	0	=	0
23	0	=	0
24	-1	=	-1

(La columna “en ruta” ha de estar vacía,los valores de la columna flujo surgen a raíz de los cálculos de “SUMAR SI” y en un inicio el valor del tiempo máximo ha de ser 0)

Los cálculos a realizar son:

- En todas las casillas de la columna flujo introduciremos la siguiente fórmula:

= SUMAR SI (columna “desde”;casilla nodo;columna “en ruta”)- SUMAR SI (columna “hacia”;casilla nodo;columna “en ruta”)

- En la casilla tiempo máximo, introduciremos la fórmula:

=SUMAPRODUCTO (columna “distancia” ; columna “en ruta”)

- Por último, abriremos la herramienta ”Solver” y seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Pondremos como objetivo la casilla “tiempo máximo”.
2. Introduciremos como parámetro/variable de cálculo la columna “en ruta”.
3. Activaremos en la herramienta la opción “maximizar” para obtener así el camino crítico y el tiempo máximo.
4. Introduciremos las siguientes restricciones/condiciones:

-*columna “flujo” = columna “condición”* (de ahí que en la matriz igualemos la columna flujo a la columna condición.)

- *columna “en ruta”, binario* (Así, obtendremos valores binarios que nos serán de interés)

Una vez puestas las condiciones y los parámetros mencionados, procederemos a resolver el problema. Con ello, obtendremos 2 resultados que son de nuestro interés:

- Obtendremos el valor discreto del tiempo máximo del grafo (o tiempo del camino crítico).
- Obtendremos valores binarios (0 y 1) que nos indicarán qué actividades se encuentran en el camino crítico (0si no pertenece al camino crítico y 1 si pertenece al camino crítico).

Tiempo mínimo y camino más óptimo

El procedimiento a seguir es exactamente el mismo, con la única excepción de que hay que activar el modo “minimizar” en Solver. Los resultados son los siguientes:

Desde	Hacia	Distancia	En ruta
0	1	3	1
1	2	7	0
1	3	0,5	1
1	5	3	0
2	7	2	0
3	8	4	0
3	4	0,5	1
3	6	0,5	0
4	6	0	1
5	8	0	0
6	9	0	1
7	8	0	0
8	9	1	0
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	1
11	13	0,25	0
12	13	0	0
12	15	0	1
13	14	2	0
14	15	0,25	0
15	16	2	0
15	18	2	1
16	17	3	0
17	18	0	0
17	19	0,5	0
18	20	1	1
19	21	0,2	0
20	22	1	1
21	22	0	0
22	23	2	1
23	24	0	1

TIEMPO MÍNIMO	19,5

Nodos	Flujo		Condición
0	1	=	1
1	0	=	0
2	0	=	0
3	0	=	0
4	0	=	0
5	0	=	0
6	0	=	0
7	0	=	0
8	0	=	0
9	0	=	0
10	0	=	0
11	0	=	0
12	0	=	0
13	0	=	0
14	0	=	0
15	0	=	0
16	0	=	0
17	0	=	0
18	0	=	0
19	0	=	0
20	0	=	0
21	0	=	0
22	0	=	0
23	0	=	0
24	-1	=	-1

Tiempo máximo de cada nodo

Para calcular el tiempo máximo de cada nodo, tendremos que transformar la primera matriz de manera que solo aparezcan los caminos posibles que llevan a ese nodo. Posteriormente tendremos 2 opciones:

1. Podemos usar Solver para resolver el tiempo máximo de cada nodo siguiendo el procedimiento anteriormente mencionado.
2. Podemos utilizar la fórmula *=MAX(SUMAPRODUCTO (columna “distancia” camino posible 1; columna “en ruta” camino posible 1);SUMAPRODUCTO (columna “distancia” camino posible 2; columna “en ruta” camino posible 2);...)* siempre y cuando establezcamos con claridad cuáles son las actividades pertenecientes al camino crítico para ese nodo de manera manual (al no usar Solver, no dispondremos de esos valores binarios, con lo que tendremos que introducirlos manualmente guiándonos con ayuda de los valores binarios obtenidos en la columna “en ruta” del tiempo máximo de todo el grafo y con ayuda de la propia representación gráfica del grafo).

Los resultados son los obtenidos en los cálculos de tiempo máximo.

cia	Distancia	En ruta
1	3	1
3	0,5	0
8	4	0
9	1	1
10	9	1
11	0,25	1
12	0,25	1
13	0	1
14	2	1
15	0,25	1
16	2	1
17	3	1
19	0,5	1
21	0,2	1
1	3	1
5	3	0
8	0	0
9	1	1
10	9	1
11	0,25	1
12	0,25	0
13	0	1
14	2	1
15	0,25	1
16	2	1
17	3	1
19	0,5	1
21	0,2	1
1	3	1
2	7	1
7	2	1
8	0	1
9	1	1
10	9	1
11	0,25	1
12	0,25	1
13	0	1
14	2	1
15	0,25	1
16	2	1
17	3	1
19	0,5	1
21	0,2	1
1	3	1
3	0,5	0
4	0,5	0
6	0	0
9	0	0
10	9	1
11	0,25	1
12	0,25	1
13	0	1
14	2	1
15	0,25	1
16	2	1
17	3	1
19	0,5	1
21	0,2	1
1	3	1
3	0,5	0
6	0,5	0
9	0	0
10	9	1
11	0,25	1

Desde	Hacia	Distancia	En ruta
0	1	3	1
1	3	0,5	0
3	8	4	0
8	9	1	1
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	1
12	13	0	1
13	14	2	1
14	15	0,25	1
15	16	2	1
16	17	3	1
17	18	0	1
18	20	1	1
20	22	1	1
0	1	3	1
1	5	3	0
5	8	0	0
8	9	1	1
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	0
12	13	0	1
13	14	2	1
14	15	0,25	1
15	16	2	1
16	17	3	1
17	18	0	1
18	20	1	1
20	22	1	1
0	1	3	1
1	2	7	1
2	7	2	1
7	8	0	1
8	9	1	1
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	1
12	13	0	1
13	14	2	1
14	15	0,25	1
15	16	2	1
16	17	3	1
17	18	0	1
18	20	1	1
20	22	1	1
0	1	3	1
1	3	0,5	0
3	4	0,5	0
4	6	0	0
6	9	0	0
9	10	9	1
10	11	0,25	1
11	12	0,25	1
12	13	0	1
13	14	2	1
14	15	0,25	1
15	16	2	1
16	17	3	1
17	18	0	1
18	20	1	1
20	22	1	1
0	1	3	1
1	3	0,5	0

Desde	Hacia	Distar
0	1	
1	3	
3	8	
8	9	
9	10	
10	11	0
11	12	0
12	13	
13	14	
14	15	0
15	16	
16	17	
17	18	
18	20	
20	22	
22	23	
0	1	
1	5	
5	8	
8	9	
9	10	
10	11	0
11	12	0
12	13	
13	14	
14	15	0
15	16	
16	17	
17	18	
18	20	
20	22	
22	23	
0	1	
1	2	
2	7	
7	8	
8	9	
9	10	
10	11	0
11	12	0
12	13	
13	14	
14	15	0
15	16	
16	17	
17	18	
18	20	
20	22	
22	23	
0	1	
1	3	
3	4	
4	6	
6	9	
9	10	
10	11	0
11	12	0
12	13	
13	14	
14	15	0
15	16	
16	17	
17	18	
18	20	

TIEMPO MÁXIMO	33,75
0	0
1	3
2	10
3	3,5
4	4
5	6
6	4
7	12
8	12
9	13
10	22
11	22,25
12	22,5
13	22,5
14	24,5
15	24,75
16	26,75
17	29,75
18	29,75
19	30,25
20	30,75
21	30,45
22	31,75
23	33,75
24	33,75

(Ejemplo de máximo de cada matriz de caminos posibles. requerida para cada nodo. *Sigue hacia abajo*)

(Resultados del tiempo máximo de cada nodo)

PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal se trata del campo de las matemáticas que se encarga de maximizar o minimizar una función objetivo. Las variables de esa función están sujetas a una serie de restricciones basadas en sistemas de ecuaciones o inecuaciones lineales. Concretamente, nosotros hemos utilizado la programación lineal entera puesto que necesitábamos resultados enteros, ya que no podemos realizar una actividad y media por ejemplo.

Para conseguir los conocimientos sobre programación lineal nos han ayudado los alumnos de 2º de bachillerato cuyo proyecto del año pasado tenía relación con esto.

Primero vamos a analizar un ejemplo corto para explicar nuestro problema.

Condiciones

Nuestro problema se basa en maximizar el número de actividades que podemos realizar. Por un lado, tenemos los tipos de actividades de los que trata nuestro proyecto (A, B, C...) y por el otro los perfiles de cada persona que participa (P1, P2, P3...). De esta manera, hemos otorgado a cada perfil el tiempo que tarda por cada actividad.

Tabla de Condiciones

	Redactar (A)	Calcular (B)	Tiempo Máx
Horas Perfil 1	3	2	8
Horas Perfil 2	1,5	3	5
Actividades Mín	4	1	

Restricciones

Además, cada perfil dispone de un máximo de horas y hemos limitado el número de cada actividad con un mínimo (límites). Estas son nuestras restricciones al problema También obtenemos una cantidad que en el caso del tiempo serán las horas que nos quedan (restantes) y con respecto a las actividades, el número de ellas que hemos realizado de más (adicional).

Restricciones			Límites	Restante/Adicional
Tiempo Máx P1	7	<=	8	1
Tiempo Máx P2	4,5	<=	5	0,5
Activ Mín A	4	>=	4	0
Activ Mín B	2	>=	1	1

Función Objetivo

Por último, llegamos a la función objetivo. El problema nos dice cuántas actividades y de qué tipo debe hacer cada perfil para maximizarlas.

H3 =SUMA(C4:D5;(F16+F17)/100)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Tabla de Valores						
3			Redactar (A)	Calcular (B)		Nº Actividades Totales		6
4		Perfil 1 (P1)	1	2				
5		Perfil 2 (P2)	3	0				
6			4	2				
7								

Pero no solo tenemos en cuenta el número de actividades sino que también el tiempo restante de los perfiles. Puesto que estamos trabajando con números enteros, existen varias soluciones óptimas a nuestro problema que cumplen todas las restricciones. Por ello, queremos que nos indique la que mayor tiempo restante produce. Para tener ese tiempo en cuenta lo hemos incluido en la función objetivo de la siguiente manera:

Le sumamos a las actividades realizadas el tiempo restante de cada perfil (F16 y F17) entre 100. Así, cuanto más tiempo sobra, mejor. Y al estar divididos entre un número grande, el tiempo sólo interferirá en los casos donde haya varias soluciones óptimas marcando una pequeña diferencia entre ellas. Para obtener el número de actividades totales solo tenemos que indicarle a esa celda que excluya los decimales.

Resolución del problema

Para resolver un problema de programación lineal existen varios programas como PHP Simplex, WinQSB o POM QM, pero nosotros utilizamos Libre Office Calc porque ya conocíamos cómo funciona. En concreto, usamos la herramienta Solver.

Para utilizarla debemos definir la celda objetivo, las celdas variables, las restricciones y si queremos maximizar o minimizar. También activamos las opciones de variables enteras y no negativas. Así nos indica en las celdas variables el número de actividades que deben ser realizadas, dándonos la combinación más eficiente.

Problema

Y ahora que entendemos todo el procedimiento pasemos al problema en cuestión.

En tal caso, dividimos el trabajo en cinco actividades (redactar, calcular, programar, investigar y plantear) y tenemos un grupo de ocho perfiles, porque al ser 15 personas nos dividiremos por parejas más uno que se queda solo.

Nº Actividades Totales	34

Tabla de Valores

	Redactar (A)	Calcular (B)	Programar (C)	Investigar (D)	Plantear (E)
Perfil 1 (P1)	1	4	0	0	0
Perfil 2 (P2)	0	0	0	0	6
Perfil 3 (P3)	0	7	0	0	0
Perfil 4 (P4)	5	0	0	0	0
Perfil 5 (P5)	0	0	0	3	0
Perfil 6 (P6)	2	0	0	0	0
Perfil 7 (P7)	0	0	0	2	0
Perfil 8 (P8)	0	0	4	0	0
	8	**11**	**4**	**5**	**6**

Tabla de Condiciones

	Redactar (A)	Calcular (B)	Programar (C)	Investigar (D)	Plantear (E)	Tiempo Máx
Horas Perfil 1	2,5	1,5	5	5	3	9
Horas Perfil 2	5	3	3,5	6	1,5	10
Horas Perfil 3	4	1	6	3,5	1,5	7
Horas Perfil 4	2	2,5	5	4	3	11
Horas Perfil 5	2,5	3	2,5	3	2	9
Horas Perfil 6	2	2	5	4,5	4	5
Horas Perfil 7	5	1,5	4	3	2	7
Horas Perfil 8	6	2	3	5	2,5	12
Actividades Mín	8	6	4	5	3	

Restricciones			Límites	Restante/Adicional
Tiempo Máx P1	8,5	<=	9	0,5
Tiempo Máx P2	9	<=	10	1
Tiempo Máx P3	7	<=	7	0
Tiempo Máx P4	10	<=	11	1
Tiempo Máx P5	9	<=	9	0
Tiempo Máx P6	4	<=	5	1
Tiempo Máx P7	6	<=	7	1
Tiempo Máx P8	12	<=	12	0
Activ Mín A	8	>=	8	0
Activ Mín B	11	>=	6	5
Activ Mín C	4	>=	4	0
Activ Mín D	5	>=	5	0
Activ Mín E	6	>=	3	3

En conclusión, podemos realizar hasta 34 actividades y nos sobran 4,5 horas en total. Cumplimos el mínimo de actividades de cada una y hacemos 5 actividades más de calcular y 3 más de plantear puesto que son las dos en las que menos tardamos.

BIBLIOGRAFÍA

Libros:

1. O. I. Miélnikov, *Teoría de grafos en problemas recreativos resueltos*, URSS, Rusia,2011.

2. L. Yú. Beriézina, *Grafos y sus aplicaciones: una introducción a la teoría de grafos*, URSS, Rusia, 2013.

3. Claudi Alsina, *Mapas del metro y redes neuronales: La teoría de grafos*, RBA Libros, España, 2011.

Enlaces de internet:

- Información sobre el terremoto de Japón:

1. https://es.m.wikipedia.org/wiki/Terremoto_y_tsunami_de_Japón_de_2011

2. https://www.google.es/amp/s/www.infobae.com/2011/03/24/1021530-japon-y-el-milagro-la-recuperacion/%3foutputType=amp-type

- Información sobre grafos:

1. https://www.google.es/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://www.unipamplona.edu.co/unipamplona/portalIG/home_23/recursos/general/11072012/grafo3.pdf&ved=2ahUKEwiezJ3sp83eAhUOCuwKHdUYCzkQFjA5egQIABAB&usg=AOvVaw3SvdkMZ2VZVqMP3rpFKFuq

2. https://sites.google.com/site/matedicreta/6-1-elementos-y-caracteristicas-de-los-grafos/

3. https://www.sinnaps.com/blog-gestion-proyectos/metodo-de-la-ruta-critica

4. https://sites.google.com/site/matedicreta/6-1-elementos-y-caracteristicas-de-los-grafos/

5. https://definicion.de/grafos/

6. https://prezi.com/m/yotof21cprob/grafos-planos-y-teorema-de-kuratowski/

7. https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_grafos#Tipos_de_grafos

8. http://webs.um.es/pacovera/miwiki/lib/exe/fetch.php?id=inicio&cache=cache&media=grafos.pdf

9. https://www.sinnaps.com/blog-gestion-proyectos/metodo-de-la-ruta-critica

10. https://es.m.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n_din%C3%A1mica

- Información sobre programación de grafos:

1. https://youtu.be/62-m5QFNEWU