TUTOR: SILVIA FERÁNDEZ
ÁREA: MATEMÁTICAS

ΦBONACCIMIENTO:

DESCUBRIENDO A FIBONACCI

RELIZADO POR:
MAR CANALES
VALENTÍN MARTÍN
RAFAEL DE FLORES
AIDA TEJADA
CELIA FERNÁNDEZ
GUILLERMO ALONSO
JUAN ANTONIO GUILLÉN
PABLO SANZ
ELENA CANO
RAFAEL MORA

GROWLAB
2019

Índice

1. INTRODUCCIÓN

La sucesión de Fibonacci es una de la sucesiones más conocidas y estudiadas de la historia de las matemáticas, que surgió de un problema relacionado con la reproducción de una pareja de conejos.

A lo largo de la historia, se han descubierto infinitud de estructuras de la naturaleza que siguen, de una forma u otra, patrones relacionados con los números de esta sucesión y se ha aplicado en diversos aspectos de la vida, tal como desarrollaremos a lo largo de nuestro trabajo.

2. ¿POR QUÉ ESTE TRABAJO?

Tras barajar varias opciones sobre el tema de nuestro proyecto, nos hemos decantado por la sucesión de Fibonacci. Esta idea surgió a partir de la primera conferencia de matemáticas que presentó el profesor de la Universidad de Sevilla, D. Jesús Soto. En ella, trasladaba las matemáticas a situaciones muy comunes del día a día. Por ello, hemos querido *descubrir* la sucesión de Fibonacci y algunas de sus diversas aplicaciones en la vida diaria y acercarlo al resto de participantes del concurso.

Con este trabajo hemos tenido que colaborar unos con otros, ya que no disponemos de tiempo ilimitado y al cabo del día realizamos gran variedad de actividades extraescolares, repartiéndonos la información y poniéndola en común posteriormente. Hemos dedicado muchas horas a la realización del mismo con el objetivo de haceros disfrutar de las matemáticas y sus secretos como lo hemos hecho nosotros con este proyecto.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es intentar cambiar la opinión de aquellos que piensan que las matemáticas son aburridas, pues a medida que las descubres y te informas un poco, puedes descubrir datos fascinantes aplicables a la vida real, como es el caso de la sucesión de Fibonacci, y despertar así la curiosidad por las mismas.

3. MÉTODO DE TRABAJO

En este trabajo hemos participado un total de diez alumnos con la ayuda de nuestra profesora de matemáticas Doña Silvia Fernández.

El modo de trabajo que hemos seguido ha sido el siguiente:

Para realizar el proyecto, establecimos un día colectivo de trabajo a la semana en el que poníamos en común la información encontrada, elegíamos temas interesantes, discutíamos sobre lo encontrado y nos explicábamos unos a otros cada uno de los datos o aplicaciones que habíamos investigado.

En las primeras sesiones, realizamos diversas lluvias de ideas hasta elegir el tema sobre el que íbamos a hacer nuestro proyecto. Seguidamente, para optimizar el tiempo, nos dividimos en parejas y nos repartimos la información a investigar. De este modo fuimos elaborando nuestro trabajo.

Una vez redactada cada parte del mismo, nos reunimos para corregir los fallos y unificarlo, entre todos, en un solo texto, adaptándolo, reescribiéndolo y añadiendo detalles con ayuda de nuestra profesora y tutora del proyecto.

Para finalizar, elegimos en consenso los representantes del grupo para la exposición oral.

4. BIOGRAFÍA

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, nació en Pisa, actual Italia, en 1175, y falleció en 1240.
Fue un matemático italiano que difundió los conocimientos científicos árabes por Europa escribiendo varios libros entre los que destaca *Liber Abaci* (1202).
Se le considera el primer algebrista de Europa, y el introductor del sistema numérico árabe, además de ser un gran amante de las ciencias orientales.
Durante su infancia fue educado en Argelia, donde su padre trabajaba como funcionario. Allí aprendió el uso del ábaco y, a causa de su interés por este instrumento y la ciencia matemática, viajó por países como Egipto, Siria, Grecia e Italia.
A lo largo de su vida mantuvo numerosas discusiones matemáticas con Juan de Palermo, filósofo de la corte del Emperador Federico II que le propuso una gran cantidad de problemas y retos que superó con éxito.

Anécdotas y curiosidades sobre su vida:

- Su nombre es Leonardo Pisado, pero a veces él se llamaba Bigollo, que significa "bueno para nada".
- El apodo de Guglielmo, padre de Leonardo, era Bonacci (simple o bien intencionado). Leonardo recibió póstumamente el apodo de Fibonacci (por filius Bonacci, hijo de Bonacci).
- Fibonacci se llegó a casar en cinco ocasiones, y todas sus esposas fueron famosas por todo lo que comían.
- Actualmente existe una revista que se dedica a estudiar la sucesión de Fibonacci, *Fibonacci Quarterly.*

Algunas aportaciones importantes a las matemáticas:

- Fue el introductor de la cifra 0.
- En su *Liber Abaci* describe también la descomposición de números en factores primos y los criterios de divisibilidad.
- Introdujo la barra horizontal para separar el numerador del denominador.
- Encontró un método para obtener ternas pitagóricas.
- Define los números congruentes y demuestra que el producto de un número congruente por un cuadrado es otro número congruente

Imagen de Fibonacci (Leonardo de Pisa)

5. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión o serie de Fibonacci hace referencia a una secuencia ordenada e infinita de números naturales descrita por Leonardo de Pisa. A cada uno de los elementos de la serie se le conoce como número de Fibonacci.

La sucesión comienza con los números 0 y 1 y, a partir de estos, cada uno de los siguientes números se obtienen de la suma de los 2 anteriores siguiendo una relación de recurrencia.

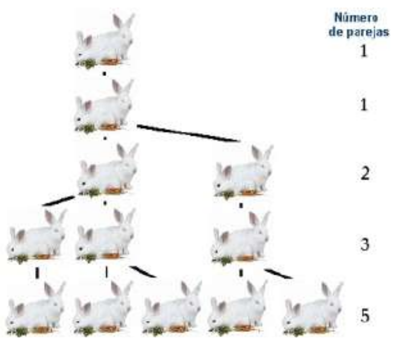
0 1 1 2 3 5 8 13 21
34 55 89 144 233 377
610 987 1597 2584....

Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci aparece escrita en el margen de su *Liber abaci* junto al conocido problema de los conejos (que más que un problema parece un acertijo de matemáticas recreativas):

"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. A partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos que, a su vez, tras ser fértiles engendraran cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?"

La respuesta a esta pregunta es la sucesión de Fibonacci.



Respuesta al problema a través de la sucesión

En esta sucesión encontramos otra peculiaridad y es que, tras dividir un número entre su anterior obtenemos una aproximación al número áureo. Esta aproximación es más exacta a medida que tendemos al infinito.

Este número ya fue descubierto por los griegos y empleado en la arquitectura.

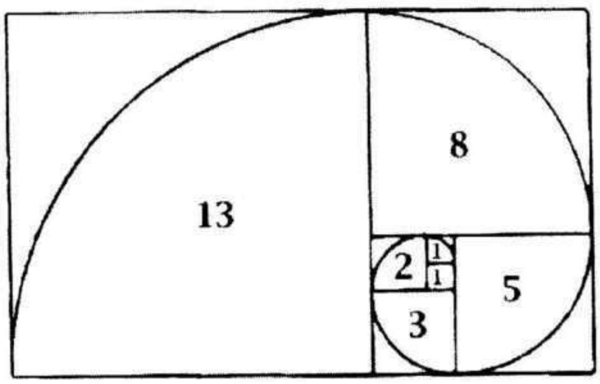
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

6. LA ESPIRAL DE FIBONACCI

La conocida como espiral de Fibonacci es una representación gráfica de la secuencia numérica de Fibonacci, también conocida como la espiral dorada. Esta gráfica es utilizada como una herramienta de composición para asegurar la proporción del equilibrio en diversas figuras y representaciones.

Es una secuencia lineal infinita generada a través de un algoritmo matemático: cada nuevo resultado se ubica en la representación gráfica alternando secuencialmente los lados de los cuadrados siempre en una misma dirección.

El resultado es una espiral perfecta que se forma tras trazar una línea curva que corta las esquinas opuestas de cada cuadrado.



Espiral de Fibonacci

7. FIBONACCI EN LA NATURALEZA Y OTRAS CURIOSIDADES

Resulta sorprendente que la sucesión de Fibonacci aparezca recurrentemente en la naturaleza: la distribución de las hojas alrededor del tallo en algunas plantas, la reproducción de los conejos o la disposición de las semillas en las numerosas flores y frutos se produce siguiendo secuencias de estos números exclusivamente.

7.1. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN LA NATURALEZA

En las semillas de girasol y en las hojas de otras plantas: Esta sucesión aparece en botánica, en el estudio de la disposición de las hojas (filotaxia). Se ha verificado en el manzano y en el roble, además de en el álamo y en el peral: una espiral de 3 vueltas pasa por 8 brotes. Las escamas de una piña de pino están dispuestas en 5 hileras que corren hacia arriba y a la derecha y 8 que lo hacen a la izquierda. Las cabezas de las margaritas y los girasoles suelen tener 21 espirales creciendo en una dirección y 34 en la otra.

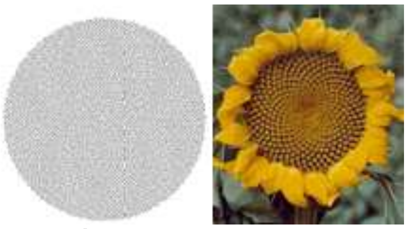


Imagen de la disposición según Fibonacci de las semillas de un girasol

También se puede encontrar en la flora de la alcachofa, en el aloe espiral y el romanescu (un tipo de brócoli)

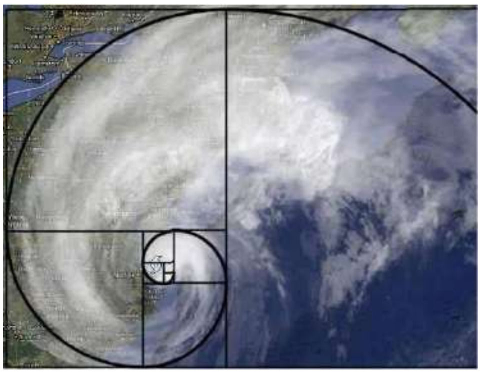
Disposición del aloe vera

Las abejas: observando las celdas hexagonales de una colmena y colocando a una abeja en cualquiera de ellas, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que hay sólo una ruta posible para la siguiente celdilla; dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera, teniendo por esto una enorme relación con la sucesión de Fibonacci.

En la mano humana: la longitud del metacarpo es la suma de las dos falanges proximales. La longitud de la primera falange es la suma de las dos falanges distales.

Imagen de la relación entre el metacarpo y las falanges

Los brazos en espiral de las galaxias y huracanes: esto puede ser explicado por medio de la espiral de Fibonacci.



Fibonacci representado en un huracán

Los equinodermos: no se debe olvidar que las series de fractales tienen su base en sucesiones de Fibonacci, las cuales están muy presentes en la naturaleza de nuestro planeta, apareciendo, por ejemplo, en las conchas de los Nautilus.

7.2. FIBONACCI EN EL ARTE

En pintura: La sucesión de Fibonacci, como hemos citado con anterioridad, es una de las sucesiones más útiles y que podemos encontrar con más frecuencia en la naturaleza. Sin embargo, esta puede ser encontrada en otros aspectos del universo, como es en la pintura. La proporción áurea es utilizada en numerosos cuadros muy famosos como: Las meninas, Adán y Eva, La Gioconda, El hombre de Vitruvio, Nacimiento de la Venus o El David vencedor de Goliat.

Fibonacci y la música:
En la música encontramos relaciones entre la sucesión de Fibonacci y la estructura de las sonatas de Mozart, Beethoven, Schubert y Debussy.
A su vez esta sucesión también se encuentra en la ubicación de las efes en los violines.

Literatura:
En el siguiente fragmento de El código Da Vinci aparece la sucesión de Fibonacci como sucesión misteriosa en la resolución de un enigma:

CÓDIGO DA VINCI (FRAGMENTO)

—Este código —insistió Sophie, es simple hasta el absurdo. Jacques Saunière debe de haber sido consciente de que lo descifraríamos al momento. —Se sacó un trozo de papel del bolsillo del suéter y se lo dio al capitán.

—Aquí lo tiene descifrado.

Fache lo estudió.

1-1-2-3-5-8-13-21

— ¿Qué es esto?

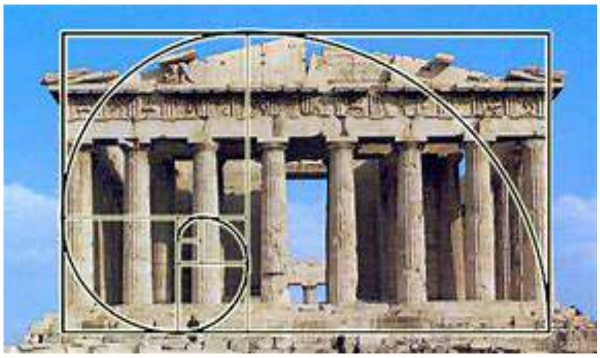
—Capitán —replicó Sophie con desafío en la voz—, la secuencia de números que tiene usted entre las manos resulta ser una de las progresiones matemáticas más famosas de la historia.

Fache no sabía siquiera que hubiera unas progresiones más famosas que otras, y no le gustaba nada aquel tono de suficiencia de la agente.

—Se trata de la Secuencia de Fibonacci —prosiguió Sophie, moviendo la cabeza en dirección al pedazo de papel que Fache aún tenía en la mano—. Una progresión en la que cada número se obtiene por la suma de los dos anteriores.

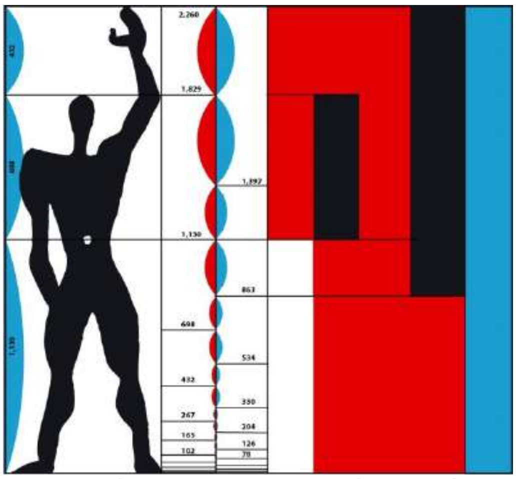
7.3. Fibonacci en la arquitectura

Desde los inicios de la arquitectura, Fibonacci y la proporción áurea han estado unidos para la construcción de grandes edificios hoy objetos de infinitas visitas tales como:



Distintas aplicaciones de Fibonacci en monumentos arquitectónicos importantes

En la arquitectura contemporánea se sigue utilizando la proporción áurea y la sucesión de Fibonacci en diferentes estructuras y aplicaciones. El concepto de sección áurea fue reivindicado durante el período de la arquitectura moderna por Le Corbusier, arquitecto que en los años 40 desarrolló un sistema de proporciones llamado Modulor en el que la proporción de las alturas estaba basada en la proporción áurea. Pero no solo Le Corbusier utilizó ampliamente el concepto: de igual forma lo hizo Mies Van der Rohe.



Proporción basada en el número áureo

Le Corbusier y la aplicación del número áureo

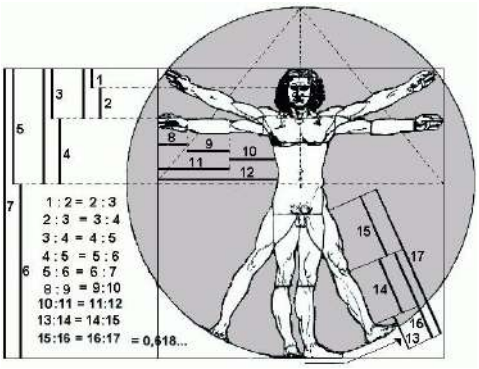
En la arquitectura, la sección áurea encuentra variadas e imaginativas aplicaciones. Veamos el caso del círculo áureo: un círculo dividido en dos secciones

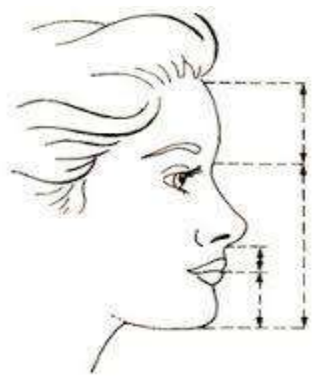
por dos radios, en el cual el cociente de la división del ángulo mayor entre el menor es igual al número de oro, Phi. La arquitectura lo aplica en la pendiente de lozas a dos aguas, en la angulación de muros y en juntas de elementos estructurales y también decorativos.
La sección áurea también es aplicada en la arquitectura contemporánea para el diseño de plantas, de tal forma que se logren ambientes armónicos y proporcionales al tamaño total de la planta. De esta forma se aplican separaciones y tamaños proporcionales para estancias, jardines, escaleras, mediante las secciones y gradación de un rectángulo áureo.

Un ejemplo del uso de la sección áurea en la arquitectura contemporánea es *La Casa G (G House)* en Ramat Hasharon, Israel, del grupo Paz Gersh Architects, un proyecto del año 2011 en el que el diseño de las fachadas se ha planteado a través del análisis preciso de proporciones utilizando la proporción áurea, el concepto se puede apreciar a lo largo de toda la casa.

7.4. OTRAS CURIOSIDADES

Esta secuencia resulta especial para nosotros ya que está en nuestro día a día y hasta en nuestro cuerpo.
Un ejemplo es el tan famoso *Hombre de Vitruvio,* que muestra las proporciones ideales que tiene que poseer el cuerpo humano. La cara, por su parte, también se percibe más atractiva cuanto más se aproximan las proporciones al número áureo. Incluso en la oreja, que la consideramos bonita cuando sigue este patrón.






Deizquierda a derecha, el Hombre de Vitruvio, y las proporciones de la cara y de la oreja siguiendo la espiral de Fibonacci.

Kilómetros, millas y Fibonacci: En la sucesión de Fibonacci es la razón entre dos números consecutivos es igual a 1,618 (número también conocido como número áureo). Curiosamente éste coincide aproximadamente con la relación entre millas y kilómetros.
1 milla es igual a 1,69 kilómetros
Es por esto que la sucesión de Fibonacci es un método rápido y sencillo para convertir millas a kilómetros.

Podemos ver una señal en la carretera, la cual indica las 55 millas, usando el número áureo sabríamos que esto se trata de 89 kilómetros

Fibonacci en los logotipos:

Un logotipo —coloquialmente también llamado logo— es un signo gráfico que identifica a una empresa, un producto comercial, un proyecto o, en general, a cualquier entidad pública o privada. La funcionalidad de un logotipo consiste en su capacidad para comunicar el mensaje que se desea, como, por ejemplo: "somos una empresa responsable" o "este producto es de alta calidad", y para conseguir esto se necesitan colores y formas que contribuyan a que el espectador final le dé esta interpretación. Una de las formas más usadas tiene que ver con la sucesión de Fibonacci, ya sea a través de círculos con radios creados a partir de esta sucesión o con el llamado rectángulo áureo.:

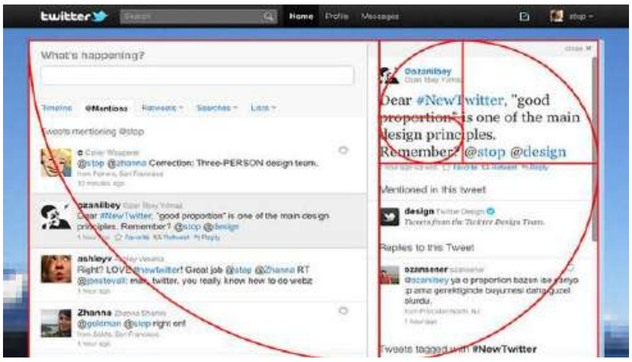
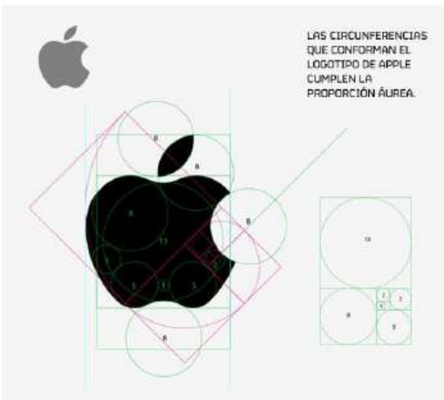
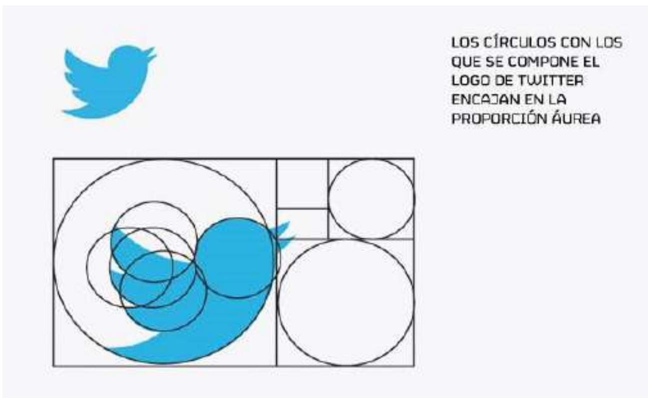


Imagen del rectángulo áureo en la red social Twitter





Imágenes de diferentes logotipos: a la izquierda el logo de la empresa Apple, a la derecha el de Twitter.

Imagen de una tarjeta de crédito en la que hay Fibonacci

8. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN LA VIDA ACTUAL. APLICACIONES:

8.1. EL RETROCESO DE FIBONACCI

En el estudio de la economía, el retroceso de Fibonacci aplicado al trading o inversión en bolsa es un indicador y sirve como una herramienta de análisis gráfico que basa su teoría en que el mercado se mueve de forma rítmica y que en este ritmo está presente la secuencia de Fibonacci.

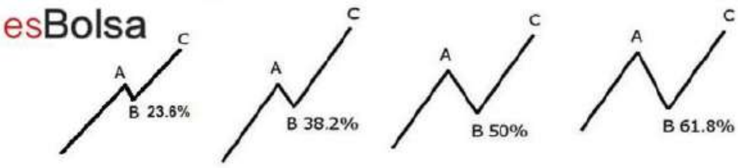
Los retrocesos de Fibonacci más populares son el 61,8% y 38,2%. Después de un avance, los analistas gráficos aplican las proporciones de Fibonacci para definir los niveles de retroceso y predecir la magnitud de la corrección. Los retrocesos de Fibonacci también se aplican después de una caída de mercado para predecir la longitud de un posible rebote.

La serie de Fibonacci, como hemos mencionado, se extiende hasta el infinito y contiene muchas propiedades matemáticas únicas:

- Un número dividido por el número posterior se aproxima a 0,6180. Esta es la base para el retroceso del 61,8%, el llamado número áureo o proporción áurea

- Un número dividido por el número dos lugares posteriores, se aproxima a 0,3820. Esta es la base para el retroceso del 38,2%.

- Un número dividido por el número situado en tres lugares posterior se aproxima a 0,2360. Esta es la base para el retroceso del 23,6%.



Representación de los retrocesos de Fibonacci

Los retrocesos de Fibonacci no son útiles para determinar la tendencia del mercado, pero ayudan a predecir los niveles de soporte y resistencia del mismo. Estos niveles nos ayudan a predecir los valores mínimos que tendrá el mercado, identificando los soportes, y los valores máximos, con las resistencias.

Gráfica de las resistencias y los soportes

Para dibujar los retrocesos de Fibonacci, primero hay que identificar los puntos extremos de un movimiento fuerte de mercado. A continuación, se dibuja una línea vertical que una los dos puntos anteriormente localizados. Una vez dibujada, esta línea será dividida por líneas horizontales separadas por porcentajes.

Método para analizar los retrocesos de Fibonacci en una gráfica

La aplicación de los retrocesos de Fibonacci en el trading nos da la capacidad de saber cuándo el precio de un bien no puede subir más (identificando las resistencias) o cuando no puede bajar más (identificando los soportes)
Las dos técnicas más famosas y útiles de inversión en bolsa usando el método Fibonacci serían:

- Comprar cerca del nivel de 38,2% con un stop loss ligeramente debajo del nivel de 50%.

- Comprar alrededor del nivel de 50% con un stop loss ligeramente debajo del nivel de 61,8%

El stop loss es una marca donde el precio ha caído. Tras mostrar esta marca, nuestras inversiones se pararían automáticamente evitando la pérdida de dinero.

8.2. TEORÍA DE JUEGOS

8.2.1. FIBONACCI EN EL CASINO

Resulta algo extraño decir que puedes ir a un casino con una estrategia ya de antemano pero, de hecho, una vez que estás jugando puedes aplicar las matemáticas para ganar: si las matemáticas están en todos los aspectos de la vida, ¿por qué no iban a estar en el juego? Los juegos no solo son suerte, también debemos conocer multitud de posibles estrategias que nos permitan alcanzar la victoria.

Una de las estrategias más utilizadas por los jugadores es aplicar la sucesión de Fibonacci, ya que esta reduce la ventaja del casino sobre el jugador e incrementa las posibilidades de ganar.

Supongamos que vamos a un casino y queremos aplicar este sistema de juego que llamaremos "de Fibonacci. Si nos fijamos en la sucesión, los primeros términos son 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… entonces, sin tener en cuenta los dos primeros términos 0 y 1, comenzamos nuestras apuestas: primero tendríamos que apostar 10€; si perdemos la apuesta debemos pasar al siguiente término de la sucesión, por lo que tendría que apostar 20€ y así, sucesivamente, si se sigue perdiendo. En caso de que ganemos una de las apuestas, automáticamente recuperaríamos todo lo invertido y comenzaríamos de nuevo. De esta manera es muy difícil perder mucho dinero en el casino y optas a muchas más posibilidades de ganar.

Imagen de una ruleta

Ventajas:

- Si se aplica el Sistema de Fibonacci de forma correcta, éste funcionará de forma positiva ya que las posibilidades de perder dinero se reducen al mínimo, además de que la probabilidad de ganar aumenta enormemente.
- Es fácil de usar y memorizar

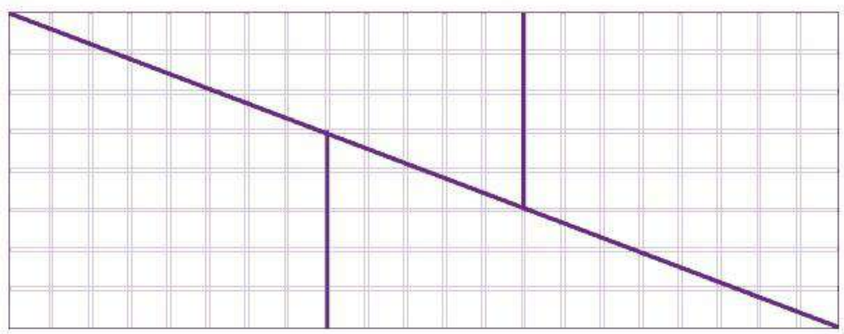
Desventajas:

- Siempre existe la posibilidad de experimentar una racha de pérdidas muy larga.

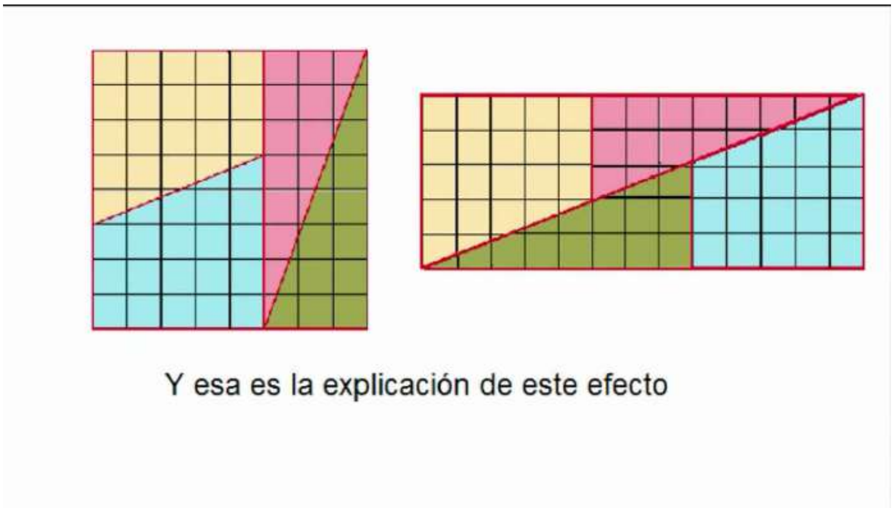
8.2.2. FIBONACCI EN LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Si nos fijamos de nuevo en la sucesión de Fibonacci, podemos ver multitud de juegos y trucos.
Por ejemplo, si cogemos (sin contar el 0) un trío de términos de la sucesión de Fibonacci siempre se va a cumplir lo siguiente:

Pongamos que se tiene un rectángulo de 21x8 (esto quiere decir que el área de dicho rectángulo es 168) si se corta siguiendo el esquema del dibujo de abajo, podemos formar un cuadrado de 13x13 cuya área es 169. Entonces, ¿de dónde ha salido ese "cuadradito" si hemos usado una figura de área 168?



El caso planteado solo ocurre con los términos de Fibonacci y se da porque los cuadrados no son perfectos y existen numerosas inexactitudes en los trapezoides que se forman, de esta manera obtenemos un "cuadradito" más y, en consecuencia, una figura de área 169. En el siguiente dibujo se muestra cómo hay que recortar la figura inicial y colocar las piezas resultantes para obtener el cuadrado de 13x13.



Explicación gráfica del efecto

8.2.3 FIBONACCI EN EL AJEDREZ

A lo largo de toda la historia del ajedrez han ocurrido hechos inolvidables: uno de ellos es su origen y cómo las matemáticas influyeron en este juego.

"Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo, en uno de los reinos de la antigua India, en lo que hoy sería Pakistán o Afganistán, vivía un desdichado rey. Este rey, rico y poderoso, había perdido toda su felicidad al perder un hijo en la guerra.
Melancólico y devastado por la muerte de su adorado hijo, el rey se abandonó a sí mismo, y descuidaba su reino y a los que en él vivían. Tal era el estado en el que estaba sumido el rey, que sus más cercanos consejeros y ministros se esforzaban por animarlo: invitaban a cantantes, músicos o bailarines para que trataran de distraerlo y que con ello el rey volviera a ocuparse de su reino. Y sin embargo, él no podía dejar de pensar que la victoria en la guerra había significado la pérdida de su hijo. El rey era tremendamente infeliz. Preocupado por el estado del reino a consecuencia de la tristeza de su rey, un sabio, Sissa decidió crear un juego que consiguiera devolverle parte de su alegría al rey, además de hacerle comprender sus errores en la guerra.
Tras reflexionar largo tiempo, Sissa, con su juego preparado, decidió presentarse frente a su rey para mostrárselo. Así pues, abrió una caja y aparecieron ante el rey: Un hermoso tablero de madera, con 64 casillas y 32 figuritas también de madera. Tras explicarle a su rey que era un juego de guerra en el que participaban dos personas, y explicarle sus reglas, se pusieron a jugar.
Emocionado por el juego que acababa de descubrir, el rey jugó durante horas y días y semanas contra todos sus ministros, consejeros y todo aquel dispuesto a retarlo. Agradecido de que por fin alguien hubiera conseguido distraerlo, le ofreció a Sissa cualquier cosa que este quisiera. Tras mucho insistir, puesto que Sissa se negaba a aceptar sus regalos, el sabio aceptó y le pidió a cambio de su juego lo siguiente:
'Quiero un grano de trigo en la primera casilla del juego, y 2 en la segunda, y 4 en la tercera y así sucesivamente…' El rey, extrañado porque alguien con tanta sabiduría, capaz de crear un juego como aquel, le pidiera tan poco, ordenó a sus ayudantes que calcularán el número total de granos de trigo y se los dieran a Sissa.
Tras unas horas calculando, los ayudantes se acercaron y le comunicaron al rey 'Su majestad, no hay en el reino cantidad suficiente de trigo para pagar la deuda con el sabio Sissa…' La cantidad de granos de trigo equivalía a:

$$T_{64} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1$$

Es decir, ¡18.446.744.073 709 551 615 granos de trigo!
El rey quedó boquiabierto, ¡jamás podría haber imaginado que lo que el sabio le pedía era imposible de pagar incluso con sus enormes riquezas! Ante la imposibilidad de pagar tal suma, el rey mandó matar a Sissa."

No solo en su origen el ajedrez está asociado con una sucesión, sino que hoy día cada vez que jugamos una partida de ajedrez somos espectadores de una de las sucesiones más importantes de la historia, la sucesión de Fibonacci.

De hecho, podemos apreciar más de un fenómeno asociado a Fibonacci en el ajedrez. Por ejemplo, el propio tablero es un cuadrado de 8x8 que cumple el mismo efecto óptico nombrado en el apartado anterior. Dicho efecto se demostró en la inauguración del campeonato mundial de Berlín, donde el presentador llegó a cortar el tablero para formar un rectángulo de 13x5 de forma que enseñó dicho efecto.

Otro fenómeno bastante curioso es que la mayor parte de las piezas, cuando se mueven, se desplazan un número de casillas que concuerda con un término de la sucesión: por ejemplo, el rey solo se puede mover una casilla hacia cualquier dirección, el peón sólo se puede mover una o dos casillas y el caballo siempre se mueve tres casillas.

Por todas estas razones se ha demostrado que sucesiones como la de Fibonacci están presentes en numerosos aspectos de nuestra vida.

Imagen de un tablero de ajedrez

9. BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA.

Biografía:

- http://sauce.pntic.mec.es/~rmarti9/WebBabilonia/Biografias/Fibonacci.htm#Inicio
- https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leonardo_depisa.htm

Sucesión y espiral de Fibonacci:

- https://quantdare.com/numeros-de-fibonacci/
- https:/https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leonardo_depisa.htm/quantdare.com/numeros-de-fibonacc
- http://www.ite.educacion.es/formacion/enred/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm
- López Sanz, Patricia: La sucesión de Fibonacci. Editorial:Grupo Editorial Círculo Rojo SL.

Fibonacci en la Naturaleza:

- https://www.tlmat.unican.es
- https://www.neoteo.com/la-sucesion-de-fibonacci-en-la-naturaleza
- https://www.quo.es/naturaleza/a21423/la-espiral-de-fibonacci
- http://blogs.hoy.es/ciencia-facil/2012/11/20/la-belleza-matematica-de-la-naturaleza/

Otras curiosidades:

- https://www.tecnicasdetrading.com/2009/11/la-aplicacion-de-la-secuenciade.html
- https://www.enbolsa.net/los-retrocesos-fibonacci/

La sucesión de Fibonacci en la Vida actual:

- https://quantdare.com/retrocesos-y-extensiones-de-fibonacci/
- Nikolaevich Vorob'ev, Nikolai: Fibonacci Numbers (escrito en inglés).
- Boroden, Carolyn: Fibonacci Trading. Madrid.2008. Editorial: Mc Graw Hill publishing Co.

Logos:

- https://codewebbarcelona.com/blog/proporcion-aurea-que-es-mito-realidad/
- https://labenditalocura.wordpress.com/2015/04/20/la-proporcion-aurea/
- https://www.youtube.com/watch?time_continue=42&v=Mwr1M9dmUuM

Teoría de juegos:

- https://matematicascercanas.com/2014/03/10/la-leyenda-del-tablero-de-ajedrez-y-los-granos-de-trigo/